

文章编号: 1002-1566(2020)02-0341-13  
DOI: 10.13860/j.cnki.sltj.20200123-005

# 基于SGT分布的ES估计、后验分析及在沪深股市中应用

王心语<sup>1</sup> 黄在鑫<sup>2</sup>

(1. 华中科技大学经济学院, 湖北 武汉 430074; 2. 华中师范大学经济与工商管理学院, 湖北 武汉 430079)

**摘要:** 由于 VaR 可能低估尾部风险, 巴塞尔委员会在第三次巴塞尔协议<sup>[1]</sup>中建议将 ES 取代 VaR 作为主要的风险度量工具, 因此, 有必要提出更精确且稳健的 ES 估计模型。鉴于股票收益率序列通常同时呈现出尖峰、厚尾、偏斜等特征, 为更全面地刻画这些特征, 本文采用具有三个形状参数的广义偏 t 分布 (Skewed Generalized T Distribution, SGT) 刻画收益率序列的分布形状, 该分布囊括了多种常见的主流分布, 通过结合能够刻画收益率序列杠杆性的 EGARCH 模型来估计收益率序列的 ES, 然后使用 Du 和 Escanciano<sup>[2]</sup>最近提出的 ES 后验分析方法对其稳健性进行评估。在实证研究中, 本文将该模型用于估计我国上证综指和深圳成指的日 ES, 结果表明, 本文提出的 EGARCH-SGT 模型相比常见的基于偏 t 分布和学生 t 分布的 EGARCH 模型明显呈现出对收益率序列更好的拟合效果, 且基于该模型估计的 ES 顺利通过了后验分析, 表现出较好的稳健性。

**关键词:** ES; 后验分析; SGT 分布; 沪深股市风险; EGARCH 模型

**中图分类号:** F830.9, O212

**文献标识码:** A

## The Estimating and Backtesting of Expected Shortfall Based on SGT Distribution with Application to Chinese Stock Markets

WANG Xin-yu<sup>1</sup> HUANG Zai-xin<sup>2</sup>

(1. School of Economics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China;

2. School of Economics and Business Administration, Central China Normal University, Wuhan 430079, China)

**Abstract:** Since traditional VaR might underestimate the tail risk, Basel Committee on Banking Supervision (BIS) recommend using Expected Shortfall (ES) as the main tool for measuring market risk instead of VaR in the third Basel Accord<sup>[1]</sup>. Therefore, it is necessary to propose more accurate and robust method for estimating ES. It is known that stock return usually exhibits the characteristics of sharp peak, heavy tail and asymmetric distribution. To describe these characteristics comprehensively, this paper employs the Skewed Generalized T distribution that has three shape parameters combined with EGARCH model which can characterize the leverage of the return series to estimate stock return's

**收稿日期:** 2019年7月10日

**通讯作者:** 黄在鑫, hzx-527@163.com

**基金项目:** 教育部人文社科青年基金 (16YJC790034), 中央高校基本科研业务费专项资金 (CCNU16A05031)。

ES, and then use the backtesting method recently proposed by Du and Escanciano<sup>[2]</sup> to evaluate its accuracy. In the empirical study, we use our model to estimate the daily ES of Shanghai composite index and Shenzhen component index. The results indicate that, compared with the performance of EGARCH models based on the common-used Skewed t distribution and Student's t distribution, the EGARCH-SGT model obviously exhibit better performance. Moreover, this model passed the backtesting successfully, indicating that it is robust.

**Key words:** ES; backtesting; SGT distribution; Shanghai&Shenzhen stock market risk; EGARCH

## 0 引言

金融风险一直是金融界关注的重要领域。对金融资产风险大小的分析直接关系到人们对该资产的评价及选择。J. P. Morgan 公司提出的 Value-at-Risk (VaR)<sup>[3]</sup> 一直被金融机构当做评估资产风险的基准模型。这种方法容易理解、易于计算,但是也存在无法刻画尾部风险、不满足次可加性<sup>[4]</sup> 等缺点。为弥补其缺陷,Artzner 等<sup>[5-6]</sup> 提出了 Expected Shortfall (ES)。该方法能较好地刻画金融资产的尾部风险,满足次可加性,因此能够对尾部风险进行更准确地评估。2008 年爆发的美国次贷危机给金融界敲响了警钟,也促使人们更加关注资产的尾部风险。2010 年 3 月,巴塞尔委员会在第三次巴塞尔协议中建议使用 ES 替代 VaR 作为主要的风险度量工具<sup>[1]</sup>。可见,ES 作为风险评估工具的优势已经被权威机构认可。可以预见,ES 将会得到风险管理者及金融监管机构的更多重视<sup>[7]</sup>。然而,相比 VaR,目前关于 ES 估计和后验分析的文献仍然比较少<sup>[7]</sup>。因此,提出更精确且稳健的 ES 估计模型十分有必要。本文旨在提出一种更准确的参数模型来估计收益率的 ES,并使用一种新的后验分析方法对其稳健性进行评估,从而为风险管理者、金融监管机构使用 ES 进行风险评估提供参考。

众所周知,ES 是在 VaR 的基础上进行的改进,因此在估计 ES 之前一般要先估计金融资产收益率的 VaR。目前有多种方法对 VaR 进行估计,例如非参数法、参数法以及半参数法<sup>[8-9]</sup>,三种方法各有优劣势<sup>[9]</sup>。对于参数法,一旦确定了收益率的分布便很容易实施。使用该方法估计 ES 的精度主要受两方面因素影响:一是选择更精确的分布函数来刻画收益率的分布特征;二是选择更精确的波动率模型来对收益率序列进行建模。在分布函数选择方面,传统的 GARCH 模型假设收益率服从正态分布或学生 t 分布,但是大量研究表明金融资产收益率呈现出尖峰、厚尾及非对称等特征<sup>[10]</sup>。因此,使用正态分布和学生 t 分布并不能对收益率的特征进行更精确地刻画。学者们曾提出多种分布函数结合 GARCH 模型来对 VaR 进行估计<sup>[9]</sup>,例如,McDonald 和 Newey<sup>[11]</sup> 提出的广义 t 分布 (Generalised t Distribution)、Nelson<sup>[12]</sup> 提出的广义误差分布 (Generalised Error Distribution)、Hansen<sup>[13]</sup> 提出的偏学生 t 分布 (Skewed Student's t Distribution)、Theodossiou<sup>[14]</sup> 提出的广义偏 t 分布 (Skewed Generalized T Distribution, SGT) 以及 APED 分布<sup>[15]</sup> 和 ALD 分布<sup>[16]</sup> 等。其中,Theodossiou<sup>[14]</sup> 提出的 SGT 分布拥有三个形状参数,分别为偏度参数,峰度参数和尾部厚度参数,分别刻画收益率的非对称、尖峰及厚尾特征。同时,该分布囊括了多种常见的主流分布函数<sup>[14]</sup>,例如 Hansen 的偏 t 分布<sup>[13]</sup>、学生 t 分布、正态分布和广义误差分布等。因此,该分布能刻画更灵活的分布形状。目前,国内外关于 SGT 分布的研究并不多,已有研究均表明该分布相比主流分布在刻画收益率特征方面具有明显优势<sup>[17-20]</sup>。因此,为更精确地对 ES 进行估计,本文选用 SGT 分布刻画股票收益率的分布特征。

在波动率建模方面,Engle<sup>[21]</sup> 提出的 ARCH 模型以及 Bollerslev<sup>[22]</sup> 提出的 GARCH 模型

被广泛地应用于金融收益率建模。之后, 学者又提出了众多基于该框架的模型, 例如 Engle 和 Bollerslev<sup>[23]</sup> 提出的 IGARCH 模型、Zakoian<sup>[24]</sup> 提出的 TGARCH 模型、Nelson<sup>[12]</sup> 提出的 EGARCH 模型等。更多 GARCH 模型可参阅 Bollerslev<sup>[25]</sup>。其中, EGARCH 模型由于没有条件约束并且能够刻画股票收益率序列的杠杆效应 (Engle 和 Ng<sup>[26]</sup>) 而被广泛用于实证研究。因此, 本文使用该模型来刻画股票收益率的波动特征。

后验分析 (Backtesting) 是评估 ES 模型预测能力的关键, 不通过后验分析的模型不能称为可靠的模型。虽然 ES 拥有 VaR 无法比拟的优势, 但是由于对 ES 进行后验分析比对 VaR 进行后验分析难得多<sup>[27]</sup>, 所以对 ES 进行后验分析一直是学术界的难题。也正是因为这点原因, ES 一直没有 VaR 使用广泛。学者们曾提出过一些 ES 的无条件后验分析方法, 例如, McNeil 和 Frey<sup>[28]</sup> 使用残差法对 ES 进行无条件后验分析; Berkowitz<sup>[29]</sup> 提出了截尾高斯法来对 ES 进行无条件检验; Kerkhof 和 Melenberg<sup>[30]</sup> 考虑了参数估计效应, 使用函数增量法来对 ES 进行无条件后验分析; Wong<sup>[31]</sup> 使用鞍点法对 ES 进行无条件后验分析; Graham 和 Pal<sup>[32]</sup> 对 Wong<sup>[31]</sup> 的检验方法进行了一些改进; Acerbi 和 Székely<sup>[33]</sup> 提出了三种非参数及模型无关的后验分析方法对 ES 进行无条件后验分析; Kratz 等<sup>[34]</sup> 通过对 ES 计算公式进行近似表达, 提出了一种多项式后验测试。但是以上方法均是无条件后验分析方法, 而且比较复杂。最近, Du 和 Escanciano<sup>[2]</sup> 首次提出了基于累积碰撞序列的 ES 条件后验分析方法。该方法原理简单, 易于操作, 一经提出便受到了学术界的关注。其基本原理是: 对于 VaR 而言, 在任意选定的置信水平下, 若中心化的碰撞序列 (Centered Violations) 是鞅差序列<sup>[29]</sup> (Martingale Difference Sequence), 则认为 VaR 模型是准确的; 对于 ES 而言, 由于 ES 是对 VaR 的左侧尾部进行积分, 因此累积碰撞序列也是对左侧尾部碰撞序列的积分, 于是我们可以通过检验其累积碰撞序列是否为鞅差序列来评估 ES 模型的准确性。Du 和 Escanciano<sup>[2]</sup> 同时也提出了基于累积碰撞序列的 ES 无条件后验分析方法。

通过以上文献梳理可以看出: 首先, ES 估计及后验分析方面的研究并不多。其次, 一方面, 不管是国内还是国外, 并未发现使用基于 SGT 分布的 EGARCH 模型来估计 ES 的研究成果; 另一方面, 对 ES 的后验分析及应用仍处于探索发展阶段。因此, 为提出更精确的 ES 估计方法并对其稳健性进行评估, 本文使用 SGT 分布对股票收益率序列的分布特征进行刻画, 然后结合 EGARCH 模型对 ES 进行估计, 在实证研究中, 将该模型同基于偏 t 分布和学生 t 分布的 EGARCH 模型进行对比, 从而验证 EGARCH-SGT-ES 模型的优势, 最后使用 Du 和 Escanciano<sup>[2]</sup> 提出的条件和无条件后验分析方法分别对该模型的稳健性进行检验。本文其他部分内容安排如下: 第 1 节旨在介绍 SGT 分布、偏 t 分布、学生 t 分布、ES/VaR、EGARCH 模型及 ES 后验分析方法等概念; 第 2 节旨在将所构建模型应用于沪深股市, 并同其他模型的拟合效果进行对比分析; 第 3 节为全文结论。

## 1 模型介绍

### 1.1 ARMA( $p, q$ )-EGARCH(1,1) 模型

为刻画股票收益率序列中的自相关性, 本文采用 ARMA( $p, q$ ) 模型对股票收益率序列的条件均值进行建模, 表达式如下:

$$R_t = \mu + \sum_{i=1}^p \varphi_i R_{t-i} + \sum_{j=1}^q \phi_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t, \quad (1)$$

$$z_t = \frac{\varepsilon_t}{\sigma_t}, \quad z_t \sim f(z_t|\theta), \quad (2)$$

其中,  $R_t$  和  $R_{t-1}$  分别是第  $t$  和  $t-1$  期的股票收益率,  $\varepsilon_t$  是第  $t$  期的残差,  $\mu$  为常数项,  $\varphi_i$  和  $\phi_j$  分别为自回归项和移动平均项系数,  $z_t$  是第  $t$  期的标准残差, 均值为 0, 方差为 1, 且服从参数(集)为  $\Theta$  概率密度为  $f$  的分布, 我们将其累积分布函数表示为  $F(\cdot|\Theta)$ 。

为刻画股票收益率中的杠杆效应, 本文选取 EGARCH 模型来对股票收益率的波动性进行建模。EGARCH 是 Nelson<sup>[12]</sup> 在 GARCH 模型基础上进行改进提出的一种指数型 GARCH 模型。相比传统 GARCH 模型, 该模型没有不等式约束, 并且  $\ln \sigma_t^2$  的平稳性 (Stationarity) 和遍历性 (Ergodicity) 很容易检测。EGARCH(1,1) 模型的表达式如下:

$$\ln \sigma_t^2 = \omega + \alpha \left( \left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right| - \left( \frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \right) + \beta \ln \sigma_{t-1}^2 + \gamma \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}}, \quad (3)$$

其中,  $\sigma_t^2$  和  $\sigma_{t-1}^2$  分别是收益率序列在  $t$  和  $t-1$  期的方差,  $\omega$  是常数项,  $\alpha$  和  $\beta$  是中间两项系数,  $\gamma$  是杠杆系数, 其数值一般为负, 意味着前期负面消息相比正面消息将给本期方差带来更大波动。

## 1.2 SGT 分布、偏 t 分布及学生 t 分布

正如前文所述, 金融资产收益率分布呈现出尖峰、厚尾及偏斜特征。传统的学生 t 分布只可以刻画出尖峰、厚尾特征, Hansen<sup>[13]</sup> 的偏 t 分布增加了偏度系数, 因此能够刻画出收益率的非对称特征。Theodoussiou<sup>[15]</sup> 提出的 SGT 分布拥有三个控制参数: 偏度参数、峰度参数及尾部厚度参数, 这三个参数共同决定了分布的形状, 因此能够刻画更灵活的分布特征。本文假设收益率序列的标准残差  $z_t$  服从 SGT 分布。由于实证部分需要对基于以上三种分布的 EGARCH 模型进行对比, 所以下文将分别介绍 SGT 分布、偏 t 分布及学生 t 分布的概率密度函数。

首先, SGT 分布的概率密度函数为:

$$f_{SGT}(z_t|k, \lambda, n) = C \cdot \left( 1 + \frac{|z_t + \delta|^k}{\frac{n+1}{k} (1 + \text{sign}(z_t + \delta)\lambda) \theta^k} \right)^{-\frac{n+1}{k}}, \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} C &= 0.5k \left( \frac{n+1}{k} \right)^{-\frac{1}{k}} B\left(\frac{n}{k}, \frac{1}{k}\right)^{-1} \theta^{-1}, \\ \theta &= \frac{1}{\sqrt{g - \rho^2}}, \\ g &= (1 + 3\lambda^2) B\left(\frac{n}{k}, \frac{1}{k}\right)^{-1} \left( \frac{n+1}{k} \right)^{\frac{2}{k}} B\left(\frac{n-2}{k}, \frac{3}{k}\right), \\ \rho &= 2\lambda B\left(\frac{n}{k}, \frac{1}{k}\right)^{-1} \left( \frac{n+1}{k} \right)^{\frac{1}{k}} B\left(\frac{n-1}{k}, \frac{2}{k}\right), \\ \delta &= \rho\theta, \end{aligned}$$

其中, 参数  $k > 0$  是该密度函数的峰度参数。  $-1 < \lambda < 1$  是非对称参数, 用来控制密度函数的偏斜程度。  $n > 2$  是该密度函数的自由度, 用来控制密度函数的尾部厚度。  $\text{sign}(A)$  是符号函数, 若  $A > 0$ , 函数取值 1, 若  $A = 0$ , 函数取值 0, 若  $A < 0$ , 函数取值  $-1$ 。  $B(\cdot)$  是贝塔函数。

偏 t 分布的概率密度函数为:

$$f_{ST}(z_t|\lambda, n) = \begin{cases} bc\left(1 + \frac{1}{n-2}\left(\frac{bz_t+a}{1-\lambda}\right)^2\right)^{-\frac{n+1}{2}}, & z_t < -\frac{a}{b}, \\ bc\left(1 + \frac{1}{n-2}\left(\frac{bz_t+a}{1+\lambda}\right)^2\right)^{-\frac{n+1}{2}}, & z_t \geq -\frac{a}{b}, \end{cases} \quad (5)$$

其中

$$a = 4\lambda c \frac{n-2}{n-1}, \quad b^2 = 1 + 3\lambda^2 - a^2, \quad c = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi(n-2)} \Gamma(\frac{n}{2})},$$

其中, 参数  $n > 2$  是自由度参数,  $-1 < \lambda < 1$  是分布函数的偏度参数, 当  $\lambda = 0$  时, 该分布退化为学生 t 分布的概率密度函数.  $\Gamma(\cdot)$  表示伽马函数.

学生 t 分布的概率密度函数为:

$$f_T(z_t|n) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi(n-2)} \Gamma(\frac{n}{2})} \left(1 + \frac{z_t^2}{n-2}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad (6)$$

其中,  $n > 2$  为自由度,  $\Gamma(\cdot)$  表示伽马函数.

本文将采用极大似然估计法来估计以上概率密度函数的参数, 即:

$$\hat{\Theta} = \underset{\Theta}{\operatorname{argmax}} \sum_{t=1}^T \ln f(z_t|\Theta). \quad (7)$$

### 1.3 VaR 及 ES 定义

VaR 定义为: 某项资产在一个给定置信水平及给定时期下可能损失的最大值 (本研究将该值定义为负值). 置信水平  $100(1-\alpha)\%$  ( $\alpha \in [0, 1]$ ) 下的 VaR 可表示为

$$\operatorname{VaR}_\alpha(R_t) = -\sup\{r|P(R_t) > \alpha\}, \quad (8)$$

其中,  $r$  是常数,  $\sup\{r|A\}$  表示事件  $A$  发生的条件下  $r$  的上确界. 该定义在离散或连续的分布下均适用.

ES 由 Artzner<sup>[3]</sup> 提出, 其定义是: 所有损失值超过 VaR 的损失的期望, 即

$$ES_\alpha(R_t) = E(R_t|R_t \leq \operatorname{VaR}_\alpha(R_t)). \quad (9)$$

由于本文采用的基准模型为 ARMA( $p, q$ )-EGARCH(1,1) 模型, 因此, 在显著性水平为  $\alpha$  时, 基于该模型的 VaR 和 ES 可分别表示为:

$$\operatorname{VaR}_t(\alpha) = \mu + \sum_{i=1}^p \varphi_i R_{t-i} + \sum_{j=1}^q \phi_j \varepsilon_{t-j} + \sigma_t F^{-1}(\alpha|\Theta), \quad (10)$$

$$ES_t(\alpha) = \mu + \sum_{i=1}^p \varphi_i R_{t-i} + \sum_{j=1}^q \phi_j \varepsilon_{t-j} + \sigma_t m(\alpha), \quad (11)$$

$$m(\alpha) = E(z_t|z_t \leq F^{-1}(\alpha|\Theta)), \quad (12)$$

其中,  $F^{-1}(\cdot|\Theta)$  为标准残差  $z_t$  累积分布函数  $F(\cdot|\Theta)$  的逆函数,  $F^{-1}(\alpha|\Theta)$  是该分布函数  $\alpha$  分位点的值,  $m(\alpha)$  是该分布函数在分位数区间  $[0, \alpha]$  上的期望值.

### 1.4 ES 后验分析

Du 和 Escanciano<sup>[2]</sup> 指出, 当样本内观测数没有比样本外观测数大很多时, 忽略参数模型的估计风险将会给 ES 后验分析带来极大的 size 扭曲 (size distortions), 因此他们根据是否考虑参数估计效应分别提出了一般的后验分析和修正的后验分析. 下文将分别对其进行介绍.

(1) 一般的后验分析. 一般的后验分析指: 对 ES 模型进行检验时不考虑参数估计效应的后验分析方法. 令  $G(\cdot, \Omega_{t-1})$  表示  $R_t$  在给定条件  $\Omega_{t-1}$  下的条件累积分布函数, 并且假设它是连续的.  $\theta_0$  为 EGARCH 模型及其标准残差概率密度函数的参数. 该参数通过数量为  $T$  的样本内数据  $\{R_{-T+1}, \hat{\Omega}_{-T}, \dots, R_0, \hat{\Omega}_{-1}\}$  估计所得,  $\hat{\Omega}_{t-1}$  是不可完全观测信息集的近似. 估计出的模型参数记为  $\hat{\theta}_T$ ,  $\hat{\theta}_T$  是  $\theta_0$  的一致估计量. 于是, 在给定参数模型条件下, 我们定义  $R_t$  的广义误差 (Generalized Errors) 及其样本表达式分别为

$$u_t = G(R_t, \Omega_{t-1}, \theta_0) \quad \text{和} \quad \hat{u}_t = G(R_t, \hat{\Omega}_{t-1}, \hat{\theta}_0). \quad (13)$$

我们将  $u_t$  的累积碰撞序列定义如下

$$H_t(\alpha, \theta_0) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \mathbf{1}(u_t \leq u) du = \frac{1}{\alpha} (\alpha - u_t) \mathbf{1}(u_t \leq \alpha), \quad (14)$$

其中,  $\mathbf{1}(A)$  表示指示函数, 如果  $A$  成立则  $\mathbf{1}(A) = 1$ , 否则  $\mathbf{1}(A) = 0$ .

式 (14) 所对应的样本表达式表示如下

$$\hat{H}_t(\alpha, \hat{\theta}_0) = \frac{1}{\alpha} (\alpha - \hat{u}_t) \mathbf{1}(\hat{u}_t \leq \alpha). \quad (15)$$

我们使用样本大小为  $n$  的样本外序列  $\{R_1, \hat{\Omega}_0, \dots, R_n, \hat{\Omega}_{n-1}\}$  对 ES 模型进行后验分析.

我们知道, VaR 的后验分析包括无条件后验分析和条件后验分析. 于是, Du 和 Escanciano<sup>[2]</sup> 分别提出了 ES 的无条件后验分析和条件后验分析方法, 其原理是, 分别通过检验  $\{H_t(\alpha, \theta_0) - \frac{\alpha}{2}\}_{t=1}^\infty$  的均值是否为 0 (无条件后验分析) 以及是否无自相关性 (条件后验分析) 来对 ES 进行无条件后验分析和条件后验分析.

无条件后验分析是基于 t 检验. 其零假设为  $H_{0u}: E(H_t(\alpha, \theta_0)) = \frac{\alpha}{2}$ . 可以算出,  $E(H_t^2(\alpha, \theta_0)) = \frac{\alpha}{3}$ , 因此,  $\text{var}(H_t(\alpha, \theta_0)) = \alpha(\frac{1}{3} - \frac{\alpha}{4})$ . 于是, 我们可以构造出用于无条件后验分析的 t 检验统计量

$$U_{ES} = \frac{\sqrt{n}(\bar{H}(\alpha, \hat{\theta}_0) - \frac{\alpha}{2})}{\sqrt{\alpha(\frac{1}{3} - \frac{\alpha}{4})}}, \quad (16)$$

其中  $\bar{H}_t(\alpha, \hat{\theta}_0)$  表示  $\{\hat{H}_t(\alpha, \hat{\theta}_0)\}_{t=1}^n$  的样本均值, 即

$$\bar{H}(\alpha, \hat{\theta}_0) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{H}_t(\alpha, \hat{\theta}_0). \quad (17)$$

但是由于参数估计效应的存在,  $U_{ES}$  的渐进分布往往不服从标准的正态分布. 该分布依赖于样本内数据样本大小 ( $T$ ) 和样本外数据样本大小 ( $n$ ) 的渐进相对大小 ( $\frac{n}{T} = \lambda$ ). Du 和 Escanciano<sup>[2]</sup> 指出, 当  $\frac{n}{T} = \lambda = 0$  时, 即: 样本内数据量远大于样本外数据量, 可得到如下推论

$$U_{ES} \xrightarrow{d} N(0, 1), \quad (18)$$

其中,  $\xrightarrow{d}$  表示依分布收敛于.

于是, 我们可以使用  $U_{ES}$  来进行无条件后验分析。

ES 的条件后验分析也是基于 t 检验。其零假设为  $H_{0c}: E(H_t(\alpha, \theta_0) - \frac{\alpha}{2} | \Omega_{t-1}) = 0$ 。我们将  $H_t(\alpha, \theta_0)$  滞后  $j$  阶 ( $j \geq 0$ ) 的自协方差和自相关系数分别定义为

$$\gamma_j = \text{Cov}(H_t(\alpha, \theta_0), H_{t-j}(\alpha, \theta_0)), \quad (19)$$

和

$$\rho_j = \frac{\gamma_j}{\gamma_0}. \quad (20)$$

$\gamma_j$  与  $\rho_j$  基于样本  $\{H_t(\alpha, \theta_0)\}_{t=1}^n$  的表达式可分别表示为

$$\gamma_{nj} = \frac{1}{n-j} \sum_{t=1+j}^n \left( H_t(\alpha, \theta_0) - \frac{\alpha}{2} \right) \left( H_{t-j}(\alpha, \theta_0) - \frac{\alpha}{2} \right), \quad (21)$$

和

$$\rho_{nj} = \frac{\gamma_{nj}}{\gamma_{n0}}. \quad (22)$$

由于上述模型中的  $\{H_t(\alpha, \theta_0)\}_{t=1}^n$  不可观测, 我们使用  $\hat{H}_t(\alpha, \hat{\theta}_0)$  来进行替代, 于是得到

$$\hat{\gamma}_{nj} = \frac{1}{n-j} \sum_{t=1+j}^n \left( \hat{H}_t(\alpha, \hat{\theta}_0) - \frac{\alpha}{2} \right) \left( \hat{H}_{t-j}(\alpha, \hat{\theta}_0) - \frac{\alpha}{2} \right), \quad (23)$$

和

$$\hat{\rho}_{nj} = \frac{\hat{\gamma}_{nj}}{\hat{\gamma}_{n0}}. \quad (24)$$

在原假设  $H_{0c}$  成立的前提下, 若  $j \geq 1$ , 则  $\rho_j = 0$ , 即: 不存在自相关性。ES 条件后验分析可使用由  $\hat{\rho}_{nj}$  构造的如下 Box-Pierce 统计量

$$C_{ES}(m) = n \sum_{j=1}^m \hat{\rho}_{nj}^2. \quad (25)$$

类似于无条件后验分析, Du 和 Escanciano<sup>[2]</sup> 指出, 当  $\frac{n}{T} = \lambda = 0$  时, 该统计量在零假设下服从标准卡方分布, 即

$$C_{ES}(m) \xrightarrow{d} \chi_m^2, \quad (26)$$

其中  $\chi_m^2$  表示自由度为  $m$  的卡方分布。统计量  $C_{ES}$  可被用来进行条件后验分析。

(2) 修正的后验分析。如上文所述, 一般的无条件后验分析检验统计量  $U_{ES}$  和条件后验分析检验统计量  $C_{ES}$  只有在  $\lambda = 0$  时才服从标准正态和卡方分布。然而, 很多时候  $\lambda$  明显大于 0, 也就是说样本内数据量并不明显大于样本外数据量, 这时候两个检验统计量就不服从标准的正态和卡方分布。为了克服上述缺陷, Du 和 Escanciano<sup>[2]</sup> 在一般的无条件和条件后验分析检验统计量中考虑参数估计效应从而提出了更稳健的检验统计量, 使得对任意  $\lambda \geq 0$  都服从标准极限分布。修正的后验分析可以不受实际过程中样本内数据量及样本外数据量大小的限制。

由于本文实证部分采用的样本内数据量远大于样本外数据量, 因此可基本忽略参数估计效应而直接使用一般的后验分析。本文不再对修正的后验分析进行介绍, 读者可参阅 Du 和 Escanciano<sup>[2]</sup> 获取详细介绍。

## 2 实证分析

本部分旨在通过在我国沪深股市中的应用验证所构建模型的优势。首先将 EGARCH-SGT-ES 模型同基于偏  $t$  分布和学生  $t$  分布的 EGARCH 模型对数据的拟合效果进行对比, 然后使用 Du 和 Escanciano<sup>[2]</sup> 提出的无条件和条件后验分析方法对 EGARCH-SGT-ES 模型的准确性进行全面评估。

### 2.1 数据的选择与处理

上证综合指数 (Shanghai Composite Index, SHI) 和深证成份指数 (Shenzhen Stock Market's Constituent Index, SZCI) 是我国大陆两支重要的股票指数。使用更精确的模型对其风险特征再次分析有助于加深对我国股市风险的认知。本文采用上证综指和深证成指的日收盘价为实证数据。数据通过雅虎财经获得。对于上证综指, 选取从 1993 年 1 月 4 日至 2015 年 12 月 31 日的日期作为样本内数据, 选取 2016 年 1 月 4 日至 2018 年 2 月 28 日的日期作为样本外数据。对于深证成指, 本文选从 1996 年 1 月 2 日至 2016 年 11 月 30 日的日期作为样本内数据, 2016 年 12 月 4 日至 2018 年 2 月 28 日的日期作为样本外数据。日收益率通过如下公式计算

$$R_t = 100 \times (\ln P_t - \ln P_{t-1}), \quad (27)$$

其中  $P_t$  为股票指数第  $t$  天的收盘价。

表 1 报告了样本数据的基本描述统计量。可以看出两大股指不管是样本内还是样本外, 峰度都很大, 说明这两大指数呈现出明显的尖峰特征。上证综指和深证成指的样本内和样本外数据偏度都比较显著, 说明这两个收益率均存在明显的非对称特征。由 Jarque-Bera 统计量的值可以看出, 两大指数均在 1% 的显著性水平下拒绝了正态分布假设。由 Ljung-Box 统计量可以看出, 对于上证综指, 在阶数为 5 时, 在 1% 显著性水平下拒绝了无自相关的假设。对于深证成指, 阶数为 1 和 5 时均在 1% 显著性水平下均拒绝了无自相关的假设。这说明两大股指的对数收益率序列均存在自相关性。由 ARCH 统计量可以看出, 两大指数均在 1% 的显著性水平下拒绝了无异方差的假设, 说明两大股指的对数收益率均存在较明显的异方差性。此外, ADF 检验结果表明两个收益率序列都是平稳的时间序列。

表 1 我国沪、深股指日收益率序列基本描述性统计量

	样本内数据		样本外数据	
	上证综指	深证成指	上证综指	深证成指
观测数	5819	5067	524	303
平均值	0.022	0.048	-0.016	-0.006
中位数	0.004	0.059	0.076	0.053
标准差	2.083	1.928	1.119	0.987
偏度	0.899	-0.300	-2.066	-1.033
峰度	19.586	3.763	12.337	3.493
最大值	28.861	12.814	4.175	2.865
最小值	-17.905	-10.627	-7.305	-4.616
Jarque-Bera 检验	97036 (0.000)	3069.300 (0.000)	—	—
Ljung-Box 检验	Q(1)	0.204 (0.651)	11.224 (0.001)	—
	Q(5)	30.757 (0.000)	35.697 (0.000)	—
ADF 检验	-17.118 (0.010)	-15.059 (0.010)	—	—
ARCH 检验	979.150 (0.000)	562.970 (0.000)	—	—

注: 正态分布的峰度为 0。

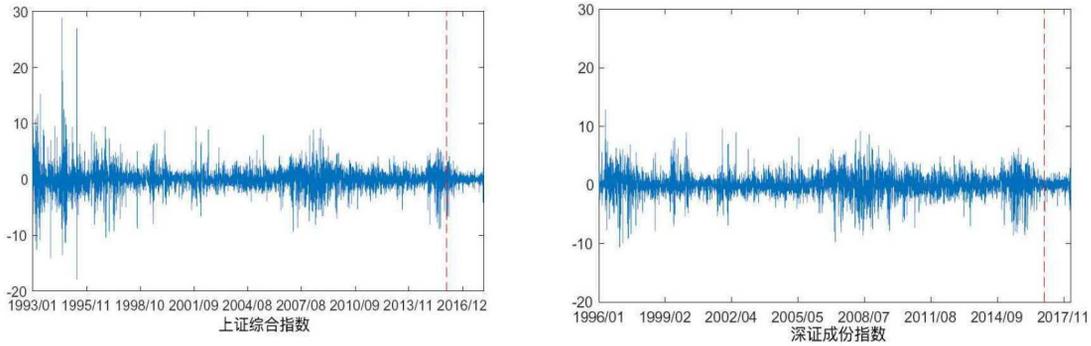


图 1 我国沪、深股指日收益率波动图

表 2 基于不同分布的 EGARCH 模型参数估计结果

模型	SGT 分布		偏 t 分布		学生 t 分布	
	上证综指	深证成指	上证综指	深证成指	上证综指	深证成指
	ARMA(1,1)- EGARCH(1,1)	ARMA(2,2)- EGARCH(1,1)	ARMA(1,1)- EGARCH(1,1)	ARMA(2,2)- EGARCH(1,1)	ARMA(1,1)- EGARCH(1,1)	ARMA(2,2)- EGARCH(1,1)
$\mu$	—	—	—	—	—	—
$\varphi_1$	-0.830** (0.093)	0.185** (0.070)	-0.820** (0.072)	0.190** (0.072)	-0.825** (0.078)	0.186** (0.073)
$\varphi_2$	—	0.813** (0.070)	—	0.807** (0.072)	—	0.812** (0.073)
$\phi_1$	0.840** (0.091)	-0.157* (0.066)	0.835** (0.074)	-0.159** (0.068)	0.839** (0.075)	-0.155** (0.069)
$\phi_2$	—	-0.823** (0.066)	—	-0.820** (0.067)	—	-0.823** (0.068)
$\omega$	0.039** (0.006)	0.031** (0.006)	0.048** (0.008)	0.034** (0.006)	0.048** (0.008)	0.033** (0.006)
$\alpha$	0.218** (0.020)	0.196** (0.018)	0.236** (0.021)	0.199** (0.018)	0.234** (0.020)	0.197** (0.018)
$\beta$	0.981** (0.004)	0.981** (0.004)	0.979** (0.004)	0.981** (0.004)	0.979** (0.004)	0.981** (0.004)
$\gamma$	-0.027** (0.010)	-0.032** (0.020)	-0.032** (0.010)	-0.034** (0.010)	-0.032** (0.010)	-0.036** (0.010)
$k$	1.232* (0.009)	1.616** (0.017)	—	—	—	—
$\lambda$	-0.018** (0.071)	-0.050** (0.017)	-0.042** (0.014)	-0.047** (0.017)	—	—
$n$	10.511** (2.714)	7.968** (1.727)	3.835** (0.219)	4.986** (0.368)	3.854** (0.219)	4.964*** (0.365)
Ljung-Box 检验	Q(1) (0.410)	3.630 (0.057)	0.272 (0.602)	2.952 (0.086)	0.321 (0.571)	3.046 (0.081)
	Q(5) (0.159)	7.946 (0.065)	4.204 (0.122)	8.537 (0.129)	4.144 (0.246)	4.115 (0.128)
ARCH 检验	4.288 (0.978)	15.936 (0.194)	3.780 (0.987)	15.964 (0.193)	3.901 (0.985)	16.682 (0.162)
AIC	21609.158	19367.713	21667.088	19374.723	21674.432	19380.358

注: \*\* 表示其在 1% 的显著性水平下显著, \* 表示其在 5% 的显著性水平下显著。

图 1 中绘制了两个股票指数的日收益率图。虚线的前半部分是样本内数据, 用来估计

EGARCH-SGT 模型参数, 后半部分是样本外数据, 用来对模型 EGARCH-SGT-ES 进行后验分析。从图中可以看出两大股指的日收益率存在明显的波动聚集现象。

## 2.2 边缘分布建模

从理论上来说, 标准残差服从 SGT 分布的 EGARCH 模型相比服从偏  $t$  分布和学生  $t$  分布的 EGARCH 模型更能刻画金融收益率分布的尖峰、厚尾及非对称特征, 拟合效果相对来说也应该会更好。为了证实这个想法, 本文使用  $ARMA(p, q)$ -EGARCH(1,1) 模型分别对两个收益率序列进行建模, 采用极大似然估计法对模型进行估计, 并将 EGARCH-SGT 与 EGARCH-偏  $t$  及 EGARCH-学生  $t$  模型对数据的拟合效果进行比较。

表 2 报告了基于不同分布的 EGARCH 模型分别对上证综指和深证成指的样本内数据拟合后的参数估计结果。我们可以看出, 所有模型的参数估计结果在 5% 的显著性水平下均显著。但是, 根据 AIC 准则我们可以看出, 对于上证综指和深圳成指, 标准残差服从 SGT 分布的模型的 AIC 值均小于标准残差服从偏  $t$  分布及学生  $t$  分布的模型, 这表明 SGT 分布比其他两种分布对数据有更好的拟合效果。我们对两大指数经过 EGARCH-SGT 模型过滤后的标准残差再次进行了 Ljung-Box 及 ARCH 检验。结果表明, 其  $p$  值均大于 0.05, 这说明 EGARCH-SGT 模型很好地过滤了两个股票收益率序列的自相关性和异方差性。

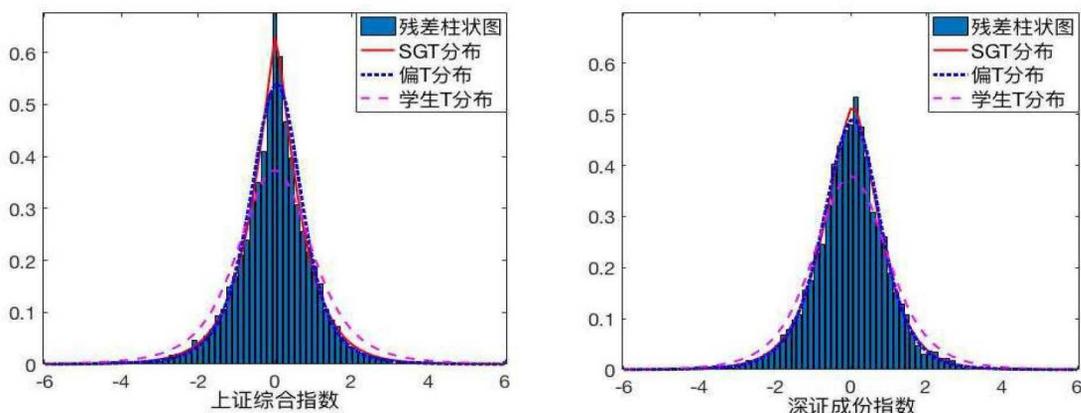


图 2 沪、深股指标准残差频率直方图及不同分布函数拟合图

图 2 分别绘制了两个收益率序列标准残差的频率直方图。为更加直观地对比基于不同分布的 EGARCH 模型对股票收益率序列的拟合效果, 我们将已经估计出的不同分布假设下标准残差的概率密度函数也绘制在了频率直方图上。从图中可以看出, SGT 分布很好地刻画了两个股票收益率的尖峰特性。虽然偏  $t$  分布对数据的拟合效果并不差, 但相比 SGT 分布, 在刻画尖峰特征方面仍有不足。相比 SGT 分布和偏  $t$  分布, 学生  $t$  分布对数据的拟合效果明显没有那么好, 主要体现在: 一方面, 学生  $t$  分布没能很好地刻画数据的尖峰特征, 另一方面, 学生  $t$  分布在一定程度上高估了两侧数据的概率分布。所以, 通过对比不同分布函数对真实数据的拟合效果图我们可以看出, SGT 分布对沪深收益率的拟合效果均为最好。这也同上文基于 AIC 准则得出的结论保持一致。

## 2.3 沪深股市日 ES 估计及后验分析

图 3 分别绘制了两个股指收益率由 EGARCH-SGT 模型估计所得的在 5% 显著水平下的样本内日 ES。可以看出, ES 能够刻画出两大股指在不同时期的风险变化情况。具体来说, 在

1997 年亚洲金融危机和 2007-2009 年美国次贷危机期间, 上证综指和深证成指的日 ES 均呈现出较大幅度的波动, 说明国际金融危机对我国股市均表现出一定程度的影响; 在 2015 年我国“股灾”期间, 沪深股市的日 ES 也出现了很大幅度波动, 这种波动甚至大于美国次贷危机期间的波动。这说明, 我国股市内部风险带来的影响大于了美国次贷危机带来的外部风险的影响。通过对比次贷危机期间和 97 年亚洲金融危机期间沪深股市日 ES 的表现, 我们发现, 亚洲金融危机期间沪深股市日 ES 的波动略大于次贷危机期间的波动。可以推断出, 我国受亚洲邻国股市的影响比受美国股市的影响略大。此外, 我们还注意到, 上证综指从 93 年初至 97 年亚洲金融危机时期的日 ES 呈现出了比其他时期更剧烈的波动。我们分析, 这主要是因为这段时期我国股市还处于探索时期, 在改革开放的大背景下, 股市运行机制还不完善、监管措施还不到位、政府对股市的规律还没有更深入认知等, 这些因素最终导致股市呈现出高度的不稳定性, 所以风险也比较大。最后, 从沪深股市日 ES 的整体波动特征来分析, 沪深股市的日 ES 呈现出类似的变化特点, 这主要是因为两个股市具有较高的相关性, 因此风险的变化也呈现出相似特征。

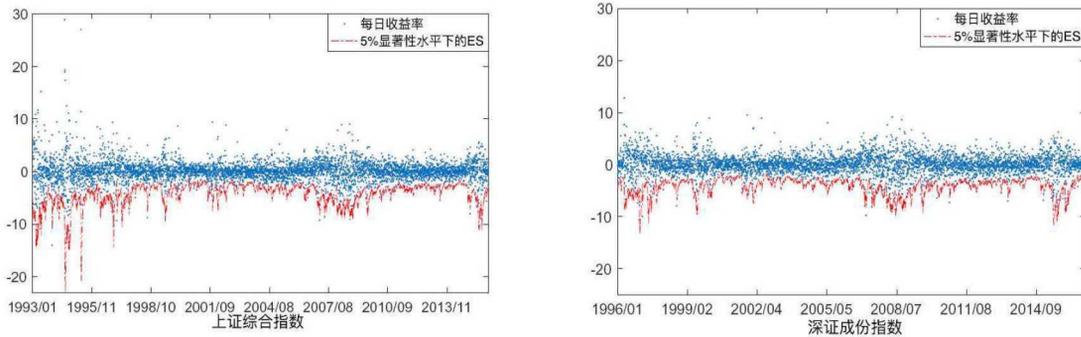


图 3 我国沪、深股指日对数收益率及 ES 估计值

为评估模型及结论的稳健性, 我们接下来采用 Du 和 Escanciano<sup>[2]</sup> 提出的后验分析方法对 EGARCH-SGT-ES 模型进行检验。由于本研究样本外观测数与样本内观测数之比已小于 1/10, 按照 Du 和 Escanciano<sup>[2]</sup> 的建议, 这种情况下可忽略参数估计效应, 所以我们采用一般的后验分析法直接对其进行后验分析。

根据后验分析标准, 只有在某个分位数水平下同时通过了无条件后验分析及条件后验分析才被认为是可靠的模型, 所以表 3 分别报告了两个股票指数 EGARCH-SGT-ES 模型在显著性水平 5% 下的 ES 条件和非条件后验分析结果。其中, 对于条件后验分析, 我们选定的阶数分别为 1、2、5 阶 (即, 式 (25) 中  $m = 1, 2, 5$ )。从表 3 可以看出, 两大指数的无条件后验分析和条件后验分析 p 值均大于 0.05, 因此两个 EGARCH-SGT 模型估计的 ES 均通过了无条件后验分析和条件后验分析。所以, 本文提出的基于 EGARCH-SGT 的 ES 估计模型对于上证综指和深证成指均为稳健的模型。

表 3 基于 EGARCH-SGT 模型的 ES 无条件和条件后验分析 p 值

指数	测试类型	统计量	ES(0.05)	指数	测试类型	统计量	ES(0.05)
上证综指	U	0.255	0.799	深证成指	U	-0.479	0.632
	C(1)	0.000	0.986		C(1)	0.523	0.470
	C(2)	0.008	0.996		C(2)	0.987	0.611
	C(5)	11.007	0.051		C(5)	10.399	0.065

注: U 是一般的无条件后验分析, C(1)、C(2)、C(5) 是  $m = 1, 2, 5$  时的一般的条件后验分析。

通过以上对比分析,我们最终得出如下结论:一、标准残差项服从 SGT 分布的 EGARCH 模型相比基于偏  $t$  分布和学生  $t$  分布的模型能更好地刻画股票收益序列的特征,所以基于该模型计算出的 ES 也更为精确;二、基于 EGARCH-SGT 模型估计的 ES 顺利通过了 Du 和 Escanciano<sup>[2]</sup> 提出的后验测试,从而证明了该模型的稳健性。

### 3 结论

传统的 VaR 方法存在无法刻画尾部风险、不满足次可加性等缺陷。因此,巴塞尔委员会在第三次巴塞尔协议中建议使用 ES 来替代 VaR 作为主要的风险度量工具。随着该协议逐渐实施,风险管理者和金融机构监管者将会越来越重视 ES 在风险评估中的角色。在这种背景下,本文提出了一种更精确估计 ES 的参数模型,并对其稳健性进行评估。在估计 ES 的过程中,一个关键步骤便是确定收益率的分布特征。本文假设股票收益率服从 Theodossiou<sup>[15]</sup> 提出的 SGT 分布。这种分布拥有三个形状参数,因此能够刻画比偏  $t$  分布及学生  $t$  分布更灵活分布形状。然后通过结合 EGARCH 模型来刻画收益率序列的异方差性及非对称性,并最终对其 ES 进行估计。在实证研究中,本文将该模型用于分析我国沪深股市的日 ES,通过将基于 SGT 分布的 EGARCH 模型同基于偏  $t$  分布和学生  $t$  分布的 EGARCH 模型的拟合效果进行对比,发现 EGARCH-SGT 模型明显呈现出更好的拟合效果。最后,采用 Du 和 Escanciano<sup>[2]</sup> 提出的后验分析方法对该模型的稳健性进行了评估。无条件后验分析和条件后验分析结果均表明该模型是稳健的。本研究一方面能够为风险经理、金融监管机构在估计金融资产 ES 方面提供更精确的工具及稳健性评估方案,另一方面实证分析结果也丰富了我国大陆股市风险特征方面的研究,从而为投资者正确决策、监管机构制定合理的监管政策提供更准确的参考。

### [ 参考文献 ]

- [1] Basel Committee on Banking Supervision. Basel III: A global regulatory framework for more resilient banks and banking systems [EB/OL]. Bank for International Settlements, <http://www.bis.org/publ/bcbs189.pdf>, 2010.
- [2] Du Z, Escanciano J C. Backtesting expected shortfall: Accounting for tail risk [J]. *Management Science*, 2017, 63(4): 940-958.
- [3] Morgan J P. Riskmetrics technical document (4<sup>th</sup> ed) [M]. New York: J.P. Morgan, 1996.
- [4] Acerbi C, Tasche D. Expected shortfall: A natural coherent alternative to value at risk [J]. *Economic notes*, 2002, 31(2): 379-388.
- [5] Artzner P, Delbaen F, Eber J, Heath D. Thinking coherently [J]. *Risk*, 1997, 10: 68-71.
- [6] Artzner P, Delbaen F, Eber J, Heath D. Coherent measures of risk [J]. *Mathematical Finance*, 1999, 9(3): 203-228.
- [7] Patton A J, Ziegel J F, Chen R. Dynamic semiparametric models for expected shortfall (and value-at-risk) [J]. *Journal of Econometrics*, 2019, 211(2): 388-413.
- [8] 李孝华, 宋敏. 基于 AEPD 分布和 ALD 分布的 VaR 模型 [J]. *数量经济技术经济研究*, 2013, (1): 135-149.
- [9] Abad P, Benito S, López C. A comprehensive review of Value at Risk methodologies [J]. *The Spanish Review of Financial Economics*, 2014, 12(1): 15-32.
- [10] 刘攀, 周若娟. AEPD、AST 和 ALD 分布下金融资产收益率典型事实描述与 VaR 度量 [J]. *中国管理科学*, 2015, (2): 21-28.
- [11] McDonald J B, Newey W K. Partially adaptive estimation of regression models via the generalized  $t$  distribution [J]. *Econometric Theory*, 1988, 4(3): 428-457.

- [12] Nelson D B. Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach [J]. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1991, 59(2): 347–370.
- [13] Hansen B E. Autoregressive conditional density estimation [J]. *International Economic Review*, 1994, 35(3): 705–730.
- [14] Theodossiou P. Financial data and the skewed generalized T distribution [J]. *Management Science*, 1998, 44(12): 1650–1661.
- [15] Zhu D, Zinde-Walsh V. Properties and estimation of asymmetric exponential power distribution [J]. *Journal of Econometrics*, 2009, 148(1): 86–99.
- [16] Lu Zudi, Huang Hai, Gerlach R. Estimating value at risk: From JP Morgans standard-EWMA to skewed-EWMA forecasting [R]. OME Working Paper, The university of Sydney, 2010.
- [17] Bali T G, Theodossiou P. A conditional-SGT-VaR approach with alternative GARCH models [J]. *Annals of Operations Research*, 2007, 151(1): 241–267.
- [18] Polanski A, Stoja E. Incorporating higher moments into value-at-risk forecasting [J]. *Journal of Forecasting*, 2010, 29(6): 523–535.
- [19] McDonald J B, Xu Y J. A generalization of the beta distribution with applications [J]. *Journal of Econometrics*, 1995, 66(1–2): 133–152.
- [20] 王恺明, 潘和平, 张煜中. 基于 SGT 分布的贝叶斯统计推断的在险价值研究 [J]. *系统工程理论与实践*, 2010, 30(3): 419–425.
- [21] Engle R F. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation [J]. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1982, 50(4): 987–1007.
- [22] Bollerslev T. Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity [J]. *Journal of Econometrics*, 1986, 31(3): 307–327.
- [23] Engle R F, Bollerslev T. Modeling the persistence of conditional variances [J]. *Econometric Reviews*, 1986, 5(1): 1–50.
- [24] Zakoian J M. Threshold heteroskedastic models [J]. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 1994, 18(5): 931–955.
- [25] Bollerslev T. Glossary to ARCH (GARCH) [A]. In: Bollerslev T, Russell J R, Watson M (eds). *Volatility and time series econometrics: Essays in honor of Robert F. Engle* [C]. Oxford, UK: Oxford University Press, 2009, 137–164.
- [26] Engle R F, Ng V K. Measuring and testing the impact of news on volatility [J]. *The Journal of Finance*, 1993, 48(5): 1749–1778.
- [27] Novales A, Garcia-Jorcano L. Backtesting extreme value theory models of expected shortfall [J]. *Quantitative Finance*, 2019, 19(5): 799–825.
- [28] McNeil A J, Frey R. Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: An extreme value approach [J]. *Journal of Empirical Finance*, 2000, 7(3–4): 271–300.
- [29] Berkowitz J. Testing density forecasts with applications to risk management [J]. *Journal of Business and Economic Statistics*, 2001, 19(4): 465–474.
- [30] Kerkhof J, Melenberg B. Backtesting for risk-based regulatory capital [J]. *Journal of Banking and Finance*, 2004, 28(8): 1845–1865.
- [31] Wong W K. Backtesting trading risk of commercial banks using expected shortfall [J]. *Journal of Banking and Finance*, 2008, 32(7): 1404–1415.
- [32] Graham A, Pal J. Backtesting value-at-risk tail losses on a dynamic portfolio [J]. *Journal of Risk Model Validation*, 2014, 8(2): 59–96.
- [33] Acerbi C, Szekely B. Backtesting expected shortfall [N]. *Risk Magazine*, 2014.
- [34] Kratz M, Lok Y H, Mcneil A J. Multinomial VaR backtests: A simple implicit approach to backtesting expected shortfall [J]. *Journal of Banking and Finance*, 2018, 88: 393–407.