

# Copula 理论国内外研究现状及展望： 一个文献综述\*

黄在鑫

**内容提要：** Copula 技术的应用使得刻画更为复杂的多变量联合分布成为可能。Copula 理论自引入我国以来便被广泛应用于金融、经济等各领域。本文分别从 Copula 理论发展历程及最新进展、几种基于 Copula 理论的计量模型、Copula 理论应用现状等几方面系统地梳理及总结了国内外 Copula 理论的发展及代表性研究成果，最后从 Copula 理论展望及 Copula 理论在我国的应用前景两方面进行了前瞻。

**关键词：** Copula；时变 Copula；尾部相关性；Copula-VaR；CoVaR

**中图分类号：** F222.3    **文献标识码：** A

## The development of Copula Theory and its furfure: A survey

**Abstract:** The application of Copula technology makes it become possible to characterize the joint distribution of the more complex multivariate. Since the introduction of Copula theory in China, it has been widely used in various fields, such as finance, economics and so on. In this paper, we systematically summarize the latest innovations of Copula theory domestic and abroad through the following aspects: first, the latest developments of Copula theory, second, several econometric models based on Copula theory, third, the main application fields of Copula theory. And finally, we analyzed these papers through the outlook of the Innovation of Copula theory and its furfure in China.

**Key words:** Copula; time-varying copula; tail dependence; Copula-VaR; CoVaR

注：本文尚未公开发表，仅用于大家学习、交流使用，谢绝索引及其它用途。

## 一、引言

Copula 理论为计算更加灵活的多变量联合分布提供了合适的工具。虽然自 Sklar(1959) 提出 Copula 理论以来该理论取得了较快发展, 但一直局限于理论创新而未被广泛应用于社会经济各领域。直到上世纪九十年代末, Copula 理论才由 Embrechts(1999)首次运用于金融领域, 并取得了较好效果。Copula 理论基于拆分思想, 通过将多变量的联合分布拆分成多个独立变量的边缘分布以及连接这些变量的连接函数(Copula 函数)。正是由于 Copula 函数能够将复杂的多变量联合分布特征以更清晰的形式刻画出来, 才使其能够逐渐被灵活地应用于金融、经济等多个领域。近年来随着 Copula 理论的推广, 越来越多的基于 Copula 的理论创新和应用创新成果不断涌现。学术界在不同时期出现了不同关于 Copula 理论的综述 (Schweizer 和 Sklar 1973,1983、Joe1997、Nelsen 1999,2003、Embrechts2001,2002、Nikolai Kolev 2007、P. Jaworski 2009、Paton 2009 等), 但未有主要从理论创新及应用创新两个角度进行综合梳理的文献。本文旨在通过从 Copula 理论发展历程及最新进展、基于 Copula 理论的计量模型、Copula 理论国内外应用现状、Copula 理论创新及在我国的应用展望等几个方面对 Copula 理论进行全面地梳理及总结。

文章各部分安排如下: 第二部分介绍 Copula 理论发展历程及最新进展; 第三部分总结几种主流的基于 Copula 理论的计量模型; 第四部分主要阐述 Copula 理论在不同领域的应用情况; 第五部分对 Copula 理论创新及应用创新进行了展望; 第六部分对全文进行了总结, 并对 Copula 理论在我国的应用进行了前瞻。

## 二、Copula 理论发展历程及最新进展

### (一) Copula 发展历程及概念

Copula 理论由 Sklar(1959)首次提出。之后, Sklar (1971)(1973)、Schweizer(1981)、GD Aglio(1990)、Alsin et al.(1993)等对其做了进一步完善。Joe(1997)和 Nelsen(1999)分别其文献中总结了 Copula 理论发展由来以及常见的 Copula 函数及其特性, 因此这两部文献成为 Copula 领域最典型的文献。Embrechts 于 1999 年首次将 Copula 理论引入金融领域, 之后 Copula 理论应用方面的研究逐渐增多。Patton(2002)在其博士学位论文中提出了时变 Copula 模型, 这是 Copula 领域发展的一个重要里程碑, 从此使用 Copula 理论来刻画数据的时变特征成为可能。Copula 理论在金融领域中的应用得到国际上广泛认可后, 张晓庭(2002)将其引入我国学术领域。之后, 韦艳华(2003)(2004)等为促进 Copula 理论在我国的应用做出重要贡献。

传统联合分布是二维正态分布或二维 t 分布, 这些联合分布函数只能适用于变量服从同样分布特征的情况。然而, 实际变量大多数情况下并非服从相同的分布特征, 例如股票收益率序列 A 可能服从自由度为 4 的 t 分布, 而股票收益率序列 B 则可能服从自由度为 5 的 t 分布, 如此以来使用传统二维 t 分布便无法精确刻画这两个收益率序列之间的联合分布特征。Copula 理论为解决此类问题提供了方法, 通过分别用不同的分布函数刻画不同变量的数据特征, 然后采用连接函数(Copula)将两个变量的累积分布函数“连接”起来, 最终刻画出变量之间的联合分布特征。将二维 Copula 函数推广至多变量便能构造出多变量 Copula 函数。Copula 函数的基本概念如下(Joe 1997):

$N$  维随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_N$  的联合分布函数为  $F(x_1, x_2, \dots, x_N)$ , 对应的边缘分布为  $F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_N(x_N)$ , 则必然存在一个  $N$  元 Copula 函数  $C(u_1, u_2, \dots, u_N)$  使下式成立:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_N) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_N(x_N)) \quad (1)$$

当  $F_1(x_1), \dots, F_N(x_N)$  为连续函数时, 可以唯一确定 Copula 函数  $C(u_1, u_2, \dots, u_N)$ ; 当边缘分布  $F_1(x_1), \dots, F_N(x_N)$  为一元分布函数时,  $C(u_1, u_2, \dots, u_N)$  为 Copula 函数, 可以用式(1)求出  $F(x_1, x_2, \dots, x_N)$  为  $N$  维随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_N$  的联合分布函数。

## (二) Copula 函数分类及多种 Copula 函数

Copula 函数可按照多种标准进行分类, 例如从静态或动态角度可分为静态 Copula 函数及时变 Copula 函数, 从参数数量分为单参数 Copula 函数及多参数 Copula 函数, 从结构类型划分可以分为固定结构 Copula 函数及变结构 Copula 函数等。Joe(1997)在其书中较为详细地介绍了多种 Copula 函数以及常见的 Copula 函数种类, 同时以参数的数量为标准将 Copula 函数总结为三大类: 双变量单参数 Copula 簇、双变量双参数 Copula 簇及多变量 Copula 簇。

在研究中使用最多的 Copula 函数主要有阿基米德 Copula 函数簇(Frank Copula、Clayton Copula 及 Gumbel Copula)、椭圆 Copula 函数簇(t Copula 及 Gaussian Copula)等(Nelsen 1999)。除此之外, 学者们又创造出来多种 Copula 函数, 这些 Copula 函数被广泛应用于金融、经济领域, 根据其自身特点可分别用于解决不同的问题。例如, Clayton Copula 能够刻画数据的上尾特性, Gumbel Copula 能够刻画数据的下尾特性, Frank Copula 能够刻画数据的对称性特性, 但为了能够充分利用这些 Copula 函数刻画数据的优势, Li (2000)提出了混合 Copula 函数。由于这种 Copula 函数能够结合多种 Copula 函数的特点, 从而实现对数据不同特征的灵活刻画, 因此众多学者应用混合 Copula 函数研究了金融领域问题, 并取得较好效果(韦艳华 2005、Hu 2006、Lai 2010); 静态 Copula 能够从静态角度刻画变量之间的相关结构, 但是对时间序列而言, 不同时间序列之间的相关结构并非一成不变的。于是 Patton (2002)(2006a,b)提出了时变 Copula 函数的概念(Hans Manner 2009, 2012)。这种 Copula 函数通过使用 ARMA(1,10) 过程来刻画相关系数的变化规律, 应用于金融领域便可以刻画时变的股票市场相关性及相关结构(Goorbergh et al. 2005、Ozun 2007、Giacomini 2009、Hafner 2010、Chen 2013); 时间序列是一直存在变化的, 因此数据的状态也会发生改变, 于是 Hamilton(1989) (1994) 提出了机制转换模型, 并由 Pelletier(2006)等学者应用于 Copula 领域构造出机制转换 Copula 函数。机制转换 Copula 函数主要适用于研究具有明显状态变化的问题(金融危机爆发、新的金融政策实施), 旨在通过刻画状态的变化揭示出状态变化前后各种指标的变化(René Garcia 2007、D.Kenourgios 2011、N. Naifar 2013、Wang 2013)。

除了以上介绍的几种 Copula 函数, 实际应用当中还会遇到 EFGM Copulas(Morgenstern 1960)、极值 Copula (Gordon Gudendorf 2009)、Autocopulas(P Rakonczai 2012)、Exchangeable copulas(Roberto Ghiselli Ricci 2012)、Sibuya copulas(Marius Hofert 2013)、Singular copula(Fabrizio Durante 2013)、Time-dependent copulas (Jean-David Fermanian 2012)、Bernstein copula 函数簇(Sancetta 2004、N Kolev 2006、Dorothea Diers 2012)、Quasi-copulas (N Kolev 2006)等多种 Copula 函数类型。此外, P. Jaworski(2009)还介绍了 Lévy Copula、Semimartingale Copula、Consistent Semimartingale Copula、Markov Copula 等其他 Copula 函数。

## 三、几种主流的基于 Copula 理论的计量模型

理论创新的目的在于通过创造新的理论从而解决之前理论无法解决的问题。基于 Copula 理论的计量模型方面的创新也无外乎从“更精确地刻画数据特征”以及“更合理地解释金融现象”等两方面展开。其中, “更精确地刻画数据特征”主要包括两个方面: 一、采用合适的分布函数来刻画数据的“尖峰”“厚尾”特性。二、指通过合适的边缘分布模型来刻画时

间序列某方面的特征。

金融时间序列数据的“尖峰”“厚尾”特征使得使用正态分布拟合其分布特征已经不再准确，为更精确地刻画不同金融数据的特征需要使用其他分布函数。对于金融收益率序列分布特征比较常见的是  $t$  分布，同时 Hansen's Shewed  $t$  分布(Jondeau E 2006)、广义极值分布(GEV)(邵雪焱 2012)、广义帕累托分布(GPD)(李秀敏 2007)、非对称幂分布(APD)(任仙玲 2009)、广义误差分布(GED)(韦艳华 2007)、拉普拉斯(AL)分布(杜红军 2012)、威布尔分布(Weibull Distribution)(邵雪焱 2012,张玲 2012)、对称广义双曲分布(SGH)(Eckhard P 2010)等分布也被分别用于描述不同特征的金融收益率序列。不同的分布函数可以刻画不同特征的数据。例如，Hansen's Shewed  $t$  分布能够刻画左右不对称的  $t$  分布特征；广义极值分布(GEV)可以捕捉序列极端值的分布特征；广义帕累托分布(GPD)可以捕捉超过上下阈值的极值信息；非对称幂分布(APD)、拉普拉斯分布(AL)及对称广义双曲分布(SGH)均可以用于刻画数据的“尖峰”、“厚尾”及“非对称性”；GED 分布能够更好地刻画数据尾部的厚薄特征。在实际应用当中根据不同的数据特征可以采用不同的分布函数来进行刻画。

金融时间序列表现出异方差性、波动聚集特性、杠杆性等特征，这些特征可以通过使用不同的边缘分布模型来刻画。传统的 GARCH 模型可以刻画金融数据的聚集、异方差等特征，LGARCH、TGARCH 和 EGARCH 模型可以刻画金融数据的杠杆特性，GARCH-M 模型可以刻画方差对收益率的影响，FIGARCH 模型可以刻画时间序列的长期记忆性特征等。当前边缘分布建模方法已经比较成熟，被用于边缘分布建模的主要有 GARCH 模型簇和 SV 模型两大类。Copula 模型通过同以上两模型结合可以构建出多种模型。

### (一) Copula 同 GARCH 模型簇结合

GARCH 模型是 Engle 提出的用于刻画时间序列边缘分布的模型，此模型因为能够较好地刻画金融数据的时变特征而被广泛应用于金融数据建模。使用 Copula 技术来刻画不同金融时间序列之间的相关结构则需要首先通过选择合适的边缘分布模型刻画出金融数据的“群聚性”、“异方差性”、“杠杆性”等特征，然后获得独立同分布的残差序列，最后对残差序列进行建模。因此选择合适的边缘分布模型成为获得有效残差序列的关键。

GARCH 模型被广泛使用以来，出现了很多此模型的改进模型，例如 MGARCH、GARCH-M、TGARCH、NAGARCHSK-M、LGARCH、EGARCH、GJR-GARCH、FIGARCH 等。因此基于 Copula-GARCH 的模型也被推广至 Copula-MGARCH、Copula-GARCH-M、Copula-TGARCH、Copula-NAGARCHSK-M、Copula-LGARCH、Copula-EAGRCH、Copula-GJR-GARCH 等模型。韦艳华(2004)使用 Copula-GARCH- $t$  模型对上海股市各板块收益率指数之间的相关性进行了研究；刘金全(2010)使用 Copula-MGARCH 刻画了多变量的波动传递及波动效应相关结构。为刻画方差对收益率序列的影响，黄在鑫(2012)使用 Copula-GARCH-M 刻画了中美五个金融市场之间的相关结构及相关性。为捕捉金融数据的非对称波动性，史美景(2012)使用 Copula-TGARCH 模型研究了股指期货套期保值问题。为考虑条件方差风险、条件偏度风险以及条件峰度对边缘分布的影响(许启发 2006)，易文德(2012)将 NAGARCHSK-M 模型同 Copula 结合研究了上证指数和深证指数之间的相关关系。陈王(2011)使用 Copula-LGARCH 模型研究了中国股市同周边股市之间的风险传导效应。为刻画金融数据的非对称性及杠杆效应，郭文旌(2009)使用 Copula-EAGRCH 对投资组合优化问题进行了研究。YiHao Lai (2008)使用 Copula-GJR-GARCH 模型分别计算了三支股票的 VaR 和 CVaR。随着 GARCH 模型的进一步发展，相信以后会出现新的基于 Copula 的计量模型。

### (二) Copula 同 SV 模型簇结合

虽然 GARCH 模型簇在刻画金融数据方面表现出了良好的效果，但有些学者指出 GARCH 模型簇在刻画时间序列的“高峰厚尾”、杠杆效应、持久的自相关性等特征方面表现比较脆弱(余素红 2004)，然而 SV 模型通过将随机过程引入到方差表达式当中，能较好地解决 GARCH

模型簇遇到的问题，因此 SV 模型被认为是刻画金融数据波动特征的最理想的模型。SV 模型首先由 Tauchen (1983)、Taylor (1986) 提出，并由 John 和 White (1987) 应用于期权定价问题研究当中。之后，Johnson (1987)、Angelo (1990)、Elias (1991) 和 Taylor (1994) 等学者对其在金融领域的应用做出了很多贡献。Kim (1998) 将 SV 模型同传统的 GARCH 进行了比较，证明 SV 模型对数据的刻画能力强过 GARCH 模型 (Bollerslev 1986)。Copula 理论同 SV 模型结合的思想与 Copula 与 GARCH 模型结合类似，即：使用 Copula 函数将通过 SV 模型拟合后的时间序列残差的概率积分转换后的分布函数连接起来。标准的二元正态 Copula-SV 模型定义如下：

$$y_{it} = \varepsilon_{it} e^{\frac{h_t}{2}}, \quad \varepsilon_{it} \sim \text{nid}(0,1) \quad (2)$$

$$h_t = \alpha + \beta h_{t-1} + \eta_{it}, \quad \eta_{it} \sim \text{nid}(0, \sigma^2) \quad (3)$$

$$(\eta_{1t}, \eta_{2t}) | I_{t-1} \sim C_{1t}(\Phi(\eta_{1t}), \Phi(\eta_{2t}) | I_{t-1}) \quad (4)$$

$$(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}) | I_{t-1} \sim C_{1t}(\Phi(\eta_{1t}), \Phi(\eta_{2t}) | I_{t-1}) \quad (5)$$

其中  $i=0,1$ ,  $T=1,2,\dots,T$ ;  $\{\varepsilon_i\}$  是均值为零，方差为 1 的正态独立分布； $\{\eta_i\}$  是均值为零，方差为  $\sigma^2$  的正态独立分布。并且  $\{\eta_i\}$  同  $\{h_i\}$  不相关； $\alpha$ 、 $\beta$  为常数。 $\eta_i$  是随机误差项，所以  $h_i$  不可观测。 $y_i = R_i - \bar{R}$ ,  $h_i = \log \sigma_i^2$ ,  $\sigma_i^2$  是  $y_i$  的方差。由于大多数股指  $\bar{R} \approx 0$  所以直接取  $y_i = R_i$ ,  $\sigma_i^2$  为  $R_i$  的方差。

国内外许多学者通过将 SV 模型同 Copula 函数相结合来分析金融领域问题。包卫军 (2008) 通过构建 Copula-SV 研究了沪深股市之间的尾部相关性。周鑫 (2010) 使用多种 Copula-SV-GED 模型对中国股票市场的投资组合问题进行了实证风险研究。周孝华 (2012) 采用 Copula-SV-GPD 模型计算了某投资组合的风险值。Hafner (2012) 使用 SV 模型提出了一种相关系数服从 SV 过程的动态随机 Copula 模型。从目前来看，虽然使用 Copula 理论同 SV 模型结合分析和解决问题的研究还并不多，但已经成为 Copula 理论发展的一个重要方向。

### (三) Copula 同向量自回归模型结合

Copula 函数除了能够同 GARCH 模型簇、SV 模型结合之外，还能够通过同向量自回归模型 (VAR) 模型结合来刻画相关关系。例如，Carluccio Bianchi (2007) 提出了 Copula-VAR-X 模型，并用此模型刻画了从德国统一到 2005 年底这段时期欧洲几个国家的工业产品指数变化。易文德 (2011) 使用 Copula-VAR 模型对股市价格和交易量的关系进行了研究。Copula-VAR 模型有以下优点：一方面可以分析出变量之间的因果关系，另一方面还可以研究出他们之间的相关结构。因此它比较适合应用于宏观经济变量相关性及相关结构的研究当中。例如，Granger et al. (2006) 使用 Copula-VAR-X-ARCH 模型检验了经济周期指数对收入和消费增长的影响。除以上模型外，Rustam Ibragimov (2012)、Martial Longla (2012) 将 Copula 函数同马尔可夫过程相结合并应用于了金融领域。

### (四) 基于 Copula 的尾部相关系数

传统的皮尔森线性相关系数 (Nelsen 1999, Cherubini 2004) 一直被广大学者用作度量不同变量之间的相关关系。但这种相关系数只能用来刻画线性相关关系 (Embrechts 1998)。加之这种相关系数只有在变量服从正态分布的时候才能使用，从而使得使用这种相关系数来度量金融数据之间的非线性相关关系不再合适。Copula 函数能够用来刻画金融数据之间的非线性相关结构，因而基于 Copula 函数的尾部相关系数 (Tawn 1996, Joe 1997, Nelsen 1999, Schmidt 2007) 也就成为有效刻画数据之间尾部非线性相关性的有效工具。尾部相关系数由 Ledford 和 Tawn (1996) 提出，分为上尾相关系数和下尾相关系数，其定义如下：

$$\lambda_u = \lim_{a \rightarrow 1} P\{x_2 > F_2^{-1}(a) | x_1 > F_1^{-1}(a)\} \quad (6)$$

$$\lambda_l = \lim_{a \rightarrow 0} P\{x_2 \leq F_2^{-1}(a) | x_1 \leq F_1^{-1}(a)\} \quad (7)$$

不同的 Copula 函数具备不同的尾部相关系数 (Joe 1997), 因此上下尾部相关系数也根据选择的 Copula 函数的不同而不同。Heffernan(2000)及 Rafael Schmidt(2005)分别系统地总结了几十种不同 Copula 函数的上下尾部相关系数的公式。传统尾部相关系数只能刻画两个变量同是上尾或者同是下尾的情况。但现实中一个变量趋向于上尾可能同另一变量趋向于下尾存在关系, 秦学志(2011)对传统尾部相关系数的不足进行了两方面的推广, 即: 变量分别趋向于不同尾部时的相关关系以及变量趋向于非尾部时的相关关系。目前, 尾部相关系数已经成为学者分析金融市场相关性的一个重要工具(Ines Fortin 2002、Eric Bouyé 2002、Gabriel Frahm 2005)。

## 四、Copula 理论国内外应用现状

Copula 理论较多地应用于金融、经济领域, 近年来也被其他领域的学者应用于不同研究领域当中。经过梳理及归纳, 本节主要介绍 Copula 理论在不同领域当中的应用现状。

### (一) 风险度量及管理领域

VaR(Value-at-Risk)模型被广泛地用于度量不同类型的风险(市场风险、操作风险及信用风险)(何旭彪 2008)。此模型是基于金融数据正态分布的假设, 然而实际金融数据具有“尖峰”“厚尾”等特征, 从而使得使用传统基于正态分布假设的风险度量模型并不能精确刻画真实的风险。Copula 函数通过刻画不同分布特征变量之间的联合分布特征能够解决传统风险度量模型存在的缺陷, 因此基于 Copula 的风险度量模型(Copula-VaR、Copula-CVaR 或 Copula-ES、Copula-CoVaR)带来了风险度量领域的变革。

许多学者研究表明基于 Copula 理论的 VaR 计算方法比传统模型表现出更好的效果(Claudio Romano 2002、Embrechts 2003, Giacomini 2009、侯成琪 2008)。然而, 虽然使用 Copula-VaR 模型相比传统 VaR 模型能较大地提高风险刻画的精确度, 但不同 Copula 模型对风险精确度的刻画影响却不大。Dean Fantazzini(2008)发现采用不同 Copula 模型对 VaR 的精度并没太大影响, 也就是说采用一般静态 Normal Copula 函数即可计算出较为精确的 VaR。当前主流计算 VaR 采用的是常见的 Copula 函数, 然而有学者发现条件 Copula 函数在刻画 VaR 方面能比常见 Copula 函数取得更好的效果(Jen-Jsung Huang 2009)。此外, 时变 Copula 模型相比静态 Copula 更能刻画时间序列的时变特征, 因此使用时变 Copula 能分析出 VaR 的变化规律及趋势(Xun Fa Lu 2011)。一般情况下计算 VaR 时只考虑双变量, Areski Cousin(2013)通过使用 Copula 函数将 VaR 模型拓展至了多变量的 VaR 模型。

传统 VaR 模型存在非次可加性及无法刻画尾部损失等缺点, 为了解决这些问题 Rockfellar (2000, 2002)将传统的 VaR 模型拓展至 CVaR 模型从而捕捉到尾部 VaR 的期望。同 VaR 模型一样, CVaR 模型也被学者拓展至了基于 Copula 理论的 CVaR 模型, 并被应用于金融领域(蒋贤锋 2010、Zong-Run Wang 2010、叶五一 2012)。此外, CVaR 模型同藤 Copula 模型结合也成为学者新的研究领域(Ling Deng 2011)。虽然 VaR 和 CVaR 等模型能够刻画单变量或多变量的风险值, 但无法对系统内部不同变量之间的风险贡献度等情况, 因此 Adrian 和 Brunnermeier (2011)提出了 CoVaR 模型来刻画系统内部不同机构之间的风险贡献。之后 Brice Hakwa (2012)将 CoVaR 模型拓展至基于 Copula 理论的 CoVaR 模型, 这种模型能够更精确地刻画系统中不同机构之间的风险影响程度。Copula-CoVaR 模型近年来也开始被国内学者引入我国(刘晓星

2011、谢福座 2010)。

## (二) 金融市场领域

金融市场领域是 Copula 理论应用较为广泛的一个领域。Copula 理论在金融领域的应用主要体现在信用风险、期货市场、汇率市场、资产组合、期权定价、债券市场等细分领域。传统的信用风险模型采用线性相关系数作为度量相关性的方法,并认为信用损失服从正态分布,然而很多研究表明信用损失并不服从正态分布,同时信用损失之间也存在着非线性相关关系,因此 Jonathan Crook(2011)证使用 Copula 理论构建了信用资产组合风险模型并证明了其精确性;国际储备的风险及其变化规律能在一定程度上影响着政府制定的国际贸易策略,采用 Copula 理论能计算更为精确的国际储备 VAR,从而为国家优化国际储备结构服务。杨楠(2012)使用时变 Copula 理论计算出了我国国际储备 VAR,通过对国际储备优化模型进行求解计算出我国国际储备的最优结构; Copula 理论在汇率市场也发挥了重要作用,不同国家汇率之间的相关性及相关结构通过采用 Copula 函数得到准确地刻画。例如, Paton(2006)使用时变 Copula 研究了德国马克同日元之间的时变相关性变化规律;此外,国内学者张自然(2012)对人民币汇率境内 SPOT 市场、境内 DF 市场和境外 NDF 市场之间的相依关系也进行了实证分析;在资产组合领域,白保中(2009)使用 Copula 函数度量了银行资产组合信用风险。周春阳(2011)研究了人民币、美元、欧元、日元及港币之间资产组合 VAR 及 CVAR;虽然 Copula 的引入对资产组合投资风险方面提供了研究的新途径,但是不同 Copula 函数的使用会对组合投资风险的计算产生不同影响,因此正确地选择合适的 Copula 模型非常重要。孙彬(2009)通过实证证明拟合数据效果较好 Copula 函数相比拟合效果较差的 Copula 函数会对最后的投资组合风险计算产生显著影响;在期权定价领域, Goorbergh(2005)使用动态 Copula 研究了纳斯达克股市及标准普尔 500 之间的双变量期权定价问题; Copula 函数也被拓展至国债市场领域。例如,蒋贤锋(2010)借鉴 Copula-CVAR 及 Copula-VAR 的思想研究了中国国债市场的统一程度。

## (三) 风险传染领域

金融风险传染一直是一个热点领域,传统研究金融风险传染的方法主要有相关系数法、向量自回归模型(VAR)、极值理论、多元GARCH模型以及脉冲响应函数等方法。由于 Copula 函数在刻画金融高频数据相关结构方面的独特优势,使得采用 Copula 理论研究国际金融市场之间的风险传染成为了可能。学术界采用 Copula 理论研究金融风险传染问题有大量研究成果,目前使用 Copula 理论研究股票市场风险传染主要通过尾部相关性分析、断点测试(相关结构变点分析)及基于 Copula 理论的 VAR 变化分析等方法。

通过尾部相关系数来分析股票市场之间的风险传染效应最为普遍。例如, Juan Carlos Rodriguez(2006)使用变换参数 Copula 分别研究了亚洲金融危机期间五个亚洲金融市场以及墨西哥金融危机期间拉丁美洲金融市场之间的风险传染问题。Aristeidis Samitas (2013)分别使用 A-DCC 模型及多种 Copula 模型(尾部相关性)研究了次贷危机时期希腊同其他欧洲国家之间的风险传染效应。此外,黄在鑫(2012)也采用 Copula 理论研究了中美五个主要股票市场之间的尾部相关性强弱。断点测试方法是通过检验断点是否存在从而检验金融风险是否发生溢出效应的方法,使用这种方法检验风险传染具有较高的可靠性。断点测试包括多种方法:例如, Soñhne M. Bartram(2007)提出了一种新的时变 Copula-GJR GARCH 模型来刻画欧洲金融市场的相关关系及时变特征;韦艳华(2008)结合 Copula 理论、Bayes 时序诊断以及使用 Z 检验来分析断点等方法研究了亚洲新兴市场之间的风险传染路径;叶五一(2009)使用基于阿基米德 Copula 的变点检测方法检验了美国次贷危机对亚洲金融市场的传染效果的存在性。金融序列 VaR 的非规律性变化也被视为风险传染的一种现象,所以 Riadh Aloui(2011)和 Marcelo Bianconi(2013)分别使用时变 Copula 研究了巴西、俄罗斯、印度、中国同美国金融市场之间

的 VaR 变化。此外,基于 VaR 的尾部相关系数也是新的检验风险溢出效应的方法(Beatriz Vaz de Melo Mendes 2004)。

时变 Copula 在分析金融风险传染方面发挥了重要作用(Thierry Ane 2003、Wuyi Ye 2012、Orlowski 2012、Peter Grundke 2013)。例如,王永巧(2011)使用时变 Copula 研究了中国大陆股市与国际主要股市之间的风险传染问题。Riadh Aloui (2011)使用时变 Copula-GARCH-M 模型分析了巴西、俄罗斯、印度、中国、美国两两之间的上下尾部相关性变化。Xiaoqian Wen(2012)使用时变 Copula 函数研究了国际能源市场与股票市场之间的风险传染效应。此外,马尔可夫转换 Copula 也可以被用来分析金融风险传染问题(Juan Carlos Rodriguez 2007)。

#### (四) 相关性度量及相关结构刻画领域

相关结构度量是 Copula 理论应用最广泛的领域之一,从其定义中我们便可得知, Copula 函数本身就是一个相关结构刻画工具。Embrechts(1999)首先较为全面地介绍了基于 Copula 的相关结构及相关性度量在风险管理中的应用。此后, Copula 函数被广泛地用于刻画相关性及相关结构。传统的线性相关系数是基于随机变量服从正态分布的假设,而很多种情况下随机变量并不服从正态分布,于是 Harry M. Kat(2003)指出传统的线性相关系数并非是一个能够刻画相关关系的合适工具,基于 Copula 理论的上下尾部相关系数、Kendall's tau 相关系数(司继文 2005)、Spearman's rho 相关系数(王沁 2011)等秩相关系数才是更为合适的相关性描述工具。

基于 Copula 理论的上下尾部相关系数被较为广泛地应用于时间序列之间的相关性刻画。张尧庭(2002)提出基于 Copula 的尾部相关系数是度量股票之间上下尾部协同性的重要指标。刘喜波(2009)、刘琼芳(2011)、Fangxia Lin(2011)、Eduardo Rossi(2013)等分别使用尾部相关系数研究了金融市场领域的相关性问题。不同的秩相关系数之间也存在一定的相关关系, Gregory A. Fredricks (2006)在其文中对 Kendall's tau 和 Spearman's rho 之间的关系进行了深入探讨。此外, Christian Genest(2007)详细介绍了 Kendall's tau 和 Spearman's rho 等非线性相关性度量方法及其在金融领域当中的应用。

相关性及相关结构的刻画主要分为静态和动态两个方面。静态相关性及相关结构主要是采用静态 Copula 函数进行刻画(黄在鑫 2012)。然而动态相关性及相关结构则是采用时变 Copula 对相关结构及相关性刻画(Kehluh Wang 2001、Xunfa LU 2011)。在实证研究中,分析金融市场相关结构主要是分析某重要事件(例如欧元区成立,新政策实施)发生前后相关结构的改变。例如, Cathy Ning(2010a,b)、Weiwei Luo(2011)分别以欧元区成立及中国 2002 年颁布的允许外商投资 A 股市场的政策为主要事件研究了相关研究对象的相关结构变化问题。有关 Copula 理论在刻画相关结构方面的文章还可以参看 Ning Zhao (2011)、Dirk G. Baur(2013)、Marcelo Brutti Righi(2013)、Henri Boubaker (2013)等。相关性度量不仅被广泛应用于金融领域,还被一些学者拓展至金融市场同其他领域之间的相关关系方面。例如 Marc Gronwald (2011)采用多种时变 Copula-ARMA-GARCH 研究了欧盟二氧化碳排放指数同金融资产之间的相关关系。

#### (五) 金融衍生工具

金融衍生工具是基于货币、债券、股票等传统金融市场工具基础上演化、派生、出来的产品,在金融市场上占据重要的地位。一些早期的 Copula 理论在此领域中的应用主要是在信用衍生产品定价方面(信用违约交换 CDS 以及债务抵押凭证 CDO)。例如, David X. Li (2000)第一个使用 Gaussian Copula 函数给 CDO 进行了定价。之后, Frey 和 McNeil(2001)使用基于 Copula 的潜变量方法对信贷投资组合损失问题进行了研究。Schönbucher 和 Schubert (2001)提出了一种将基于 Copula 的动态违约相关结构融入基于强度的违约风险模型的方法。詹原瑞(2008)构建了我国基于 Copula 理论的信用违约互换组合定价模型,从而为解决我国不良

贷款和流动性过剩问题提出了一个有效机制。此外, Copula 理论在违约风险方面的应用还可以见 Giesecke (2004)、Hofert (2011)等。

## (六) 农业领域

Copula 理论在农业领域主要包含在农业自然风险分析、地理水文干旱、森林植被分析以及农产品市场等多个方面。农业自然的灾害损失评估对于制定合理的农业政策有重要作用,因此使用 Copula 理论刻画自然灾害的风险对于农业生产非常重要。邵腾伟(2011)、Joshua D. Woodard (2011) 分别将 Copula 理论应用于农业自然灾害风险及粮食生产的风险保障问题当中;传统的干旱模型或指数只能反映某一变量对干旱的影响,而 Copula 理论使得建立多变量的联合干旱模型成为了可能(Shih-Chieh Kao 2010、宋松柏 2011)。干旱程度被用来反映区域的水缺乏程度,但当前缺乏对地域水缺乏程度的量化度量方法, Xin Lu Tan(2011)通过将树结构图形模型同 Copula 理论结合设计出了一种能够反映多个数据点干旱特征的干旱指数。李计(2012)、Qiang Zhang(2013)通过将珠江盆地对于干旱有影响的五个同质区域,然后使用 Plackett copula 构建出五个区域之间的相关结构。此外,关于使用 Copula 理论建立干旱模型的文献还可以参看 Ashok K. Mishra (2011)、Qiang Zhang (2013)等;森林的空间结构是森林生长和产量的驱动之一,同时也为野生动物提供栖息场所。森林的空间结构能够被度量, John A. Kershaw Jr.(2010)便提出了一种基于 Copula 理论的能够将物种组成、直径、高度及同其他空间物种的关系等因素考虑进来从而立刻刻画森林空间结构的方法。Copula 函数还被用于研究林业同气温、降水量、湿度与日照数等气候因素之间的关系(向中华 2012);此外, Copula 理论也被学者应用到了农产品市场中。例如, Sriboonchitta(2013)通过使用基于 Copula 的 GARCH 模型分析了泰国农产品价格波动同农产品指数之间的相关结构。

## (七) 环境、气象领域

Copula 理论之所以能够被广泛地应用于金融领域,其中一个主要的原因便是由于金融领域大量的数据。自然界当中气温、降雨、洪水、风浪等气象也同样具有大量的数据,因此许多学者也将 Copula 理论应用到了环境、气象领域。从目前来看, Copula 理论主要能够被应用于地震、降雨、洪水、暴风雨、风浪等一些气象灾害的分析当中。

地震损失度和山体滑坡灾害对于人类的交通及日常生活有着非常重要影响,有效地刻画这些自然灾害的风险及其损失具有非常重要的意义。Katsuichiro(2010)通过创建了基于 Copula 理论的地震损失模型刻画了空间建筑及基础设施同地震损失直接的相关关系。传统的山体滑坡灾害评估方法是基于若干灾害影响因素(幅度、频率、位置等)独立的假设前提,然而实际当中这些因素之间是存在相关关系的,于是 Manouchehr Motamedi (2013)通过使用 Copula 理论建立了多种灾害影响因素相关联的山体滑坡灾害评估方法。

极端降雨事件对于经济、农业和环境等有着较大的影响,因此量化极端降雨事件及不同地区之间的相关结构能够加深对极端降雨的了解,并对建立基础防洪、完善防暴措施有指导意义。Amir Aghakouchak (2010)通过使用基于 Copula 的尾部相关系数研究了美国某几个地区的极端降雨相关结构以及不同地区之间的极端降雨尾部相关性。B. Palynchuk(2011)通过使用 Copula 函数建立了暴风雨深度、持久时间、峰值强度等三个变量的联合分布模型。在水文当中分析洪水及暴风雨经常会用到 IDF 曲线,但是很多地区的 IDF 曲线只是考虑了在固定时间间隔内的单变量变化,然而现实世界当中影响洪水或暴风雨的因素远非一个因素,于是 N.M. Ariff(2012)使用基于 Copula 方法的双变量频率分析方法得到了马来西亚暴风雨爆发的 IDF 曲线。此外, Copula 理论在极值降雨方面的应用还可以参看 Michael Leonard(2008)、Xiaojing Wang(2010)、Ummul Fahri Abdul Rauf(2012)、Yeboah Gyasi-Agyei (2012a b)等。

洪水灾害带来的影响及其风险分析是 Copula 理论在环境、气象领域的另一重要应用。闫宝伟(2013)通过使用 Copula 函数构建了长江及清江最大 15 天洪量同其间隔时间的联合分

布,基于此建立了两江洪水遭遇的风险模型。夏军(2012)分别使用 Copula 函数研究了黄河流域太原水站附近降水量及干旱、淮河流域鲁台子水文站降水量及洪峰流量之间的相关结构。T. Ghizoni (2012)使用基于 Copula 理论的频率分析方法评估了密西西比河上游不同地区的洪水危害。周研来(2013)使用 Copula-SAR 模型刻画了清江洪水组成的水文特征。此外关于洪水危害度量方面的文章还可以参考 Sergiy Vorogushyn(2011)、Giuseppe(2012)、Rabah Mazouz (2012)等。

有学者也将 Copula 理论应用在了我国北方沙尘暴分析领域及海洋风浪分析方面。例如,刘雪琴(2012)通过使用 Copula 函数刻画了内蒙古强沙尘暴 10 分钟平均最大风速和持续时间的联合分布特征。徐龙军(2013)通过将基于 Archimedean Copula 函数 C-测度的第二重现期应用于风浪联合分布重现期的分析当中计算了某海洋观测点的风浪联合分布的荷载效应。此外, Hanne T. Wist(2005)使用 Copula 理论研究了海洋的波高问题, Francesco Serinaldi (2011)提出了一种基于 Copula 理论的方法用于研究海浪对海边建筑物的影响。

Copula 理论除了以上被应用于环境、气象领域外,还被应用于水循环、风场布局、以及环境污染方面。例如, Ming Pan (2008)使用 Copula 理论研究了地区水循环问题, Oliver Grothe(2011)使用藤 Copula 研究了风场的最优安置点问题。He Zhanqiong (2013)使用时变 Copula-GARCH 模型研究了城市、地区及国家的空气污染指数之间的时变相关结构。

#### (八) 预测领域

预测一直是经济学当中的一个重要部分, Copula 理论通过对历史数据的特征进行刻画从而也能够被应用于预测领域。Hongming Yang (2011)通过 Copula 函数来刻画风力载荷同冰载荷之间的相关关系,从而提出了一种基于 Copula 理论及机器学习器的方法,此方法可以用来预测在冰雹期间给输电设备带来的损失。Oleg Sokolinskiy(2011)提出了一种新的基于 Copula 函数的可用于对可实现波动率(RV, Realized Volatility)进行建模和预测的新方法,此方法能够捕捉到波动率的相关特征(例如非线性动态性及长期记忆性等)。此外, Patton(2012)还总结出了多种基于 Copula 的多变量时间序列预测方法。Benjamin Beckers (2013)分别使用四种基于不同 Copula 的 Copula-TGARCH 模型对条件 VaR 及条件 ES 进行了预测,实证证明基于 Frank Copula 的预测模型预测效果最理想。

#### (九) 系统可靠性领域

系统整体可靠性取决于子系统的可靠性,然而不同的子系统寿命服从不同的分布,为度量系统的整体可靠性需要将不同的子系统寿命的联合分布刻画出来,因此 Copula 理论也能被广泛地应用于系统可靠性领域。唐家银(2010)使用 Copula 函数刻画了工作零件寿命及储备零件寿命之间的相关结构。当前系统可靠性的评估大多建立在系统部件独立性假设的基础上,而这种假设并不符合实际情况,刘喆(2013)引入 Copula 函数对串联系统的部件相依性问题进行了研究,从而使得计算得到的可靠性的计算结果更为准确。张玲(2012)将多元 Copula 函数应用于了系统的可靠性度量领域。

#### (十) 其他领域

Copula 理论除了被应用于以上主要领域外,还被学者拓展至了交通领域、能源领域、宏观经济领域、医疗健康领域、地质分析领域以及旅游业等。例如, Woojune Yi(1998)将 Copula 理论应用于交通事故的预防分析当中; Ricardo J. Bessa(2012)、H. Valizadeh Haghi(2010)以及 Simeon Hagspiel(2012)分别将 Copula 理论应用于风能源领域。Pekka Malo(2009)将 Copula 理论拓展至于电能领域;王璐(2012)采用 Copula 理论研究了投资与消费的相关关系。韩雪莲(2010)对公共事业指数和工业指数的相关性进行了研究; Pietro Berkes (2010)、Laura Sacerdote (2010) (神经元相关性研究)、Xiaobing Zhao(2013) (医疗成本研究)、Steven T. Yen(2010) (烟草健康领域)、J Dai(2013) (肥胖和高血压相关性研究)等实践了 Copula 理论在医疗健康领域的应

用: Xiao-Song Tang (2013)使用 Copula 理论研究地质可靠性问题;最后, J Liu (2013)将 Copula 理论应用于不同国家游客之间的相关性当中。

## 五、Copula 理论研究展望

Copula 理论虽然已经经历了近六十年的发展,但无论从理论创新还是应用创新方面仍存在很大研究潜力。理论创新具备较大的发散性和不可预测性,关于 Copula 理论未来会如何发展也很难预见。从目前来看,有几个方面逐渐成为 Copula 理论的研究热点:

(1) 构建新的 Copula 函数。当前已有的不同种类的 Copula 具有不同的特点, Patton 观点认为这些 Copula 函数并非是“理想 Copula 函数”,于是他提出了理想 Copula 函数的概念 (Patton2012),并指出“理想 Copula 函数”应当具备四个特征:首先,既能够刻画正的相关性又能刻画负的相关性;其次,同时能捕获对称及非对称的相关结构;再次,具备非零尾部相关性;最后,能扩展到多维模型。因此,如何构建能够适合于不同研究的“理想 Copula 函数”成为统计学家们面临的一大难题。此外,不同的 Copula 函数具备不同的尾部特征及对称性特征,因此如何构建更加能刻画金融数据不同特性的 Copula 函数也是学者们正在面临的问题。

(2) 高维 Copula 模型及其应用。当前研究对象基本都是针对低维数据(10个变量以内),由于很多问题涉及到高维的变量,所以 Patton(2012)指出高维 Copula 函数方面的研究将成为新的研究方向。当前学术界已经出现了一些高维 Copula 方面的研究成果。例如, Daul et al. (2003) 提出了一种能够用于分析 100 种变量的问题的组 t copula。Matthias Fischer(2005)对比了多种多变量 Copula 模型在拟合数据方面的效果。Aas et al. (2009) 和 Czado (2010) 采用多变量藤 Copula 构建出了高维 Copula 函数。此外, Nelson(2003)、JA Rodríguez (2003)、Patton (2011b)、Morillas (2005)、Liebscher (2006)、Savu (2006)、Stefano Demarta(2005)等也都对高维 Copula 函数及其应用进行了研究。

(3) 基于 Copula 理论的计量模型。本文已经提及到几种同 Copula 理论相结合的模式,这些模型通过将 Copula 函数同其他模型进行整合从而解决金融、经济领域当中的问题。由于 Copula 理论在捕获不同变量之间非线性相关性方面的独特优势,从而使得此理论能同其他很多模型进行结合。例如,当前模型中凡是存在二维正态分布和 t 分布假设的模型均可以使用 Copula 函数将其拓展至不同分布特征的模型(例如,传统正态分布假设的 VaR 模型被拓展为基于 Copula 的 VaR 模型)。传统的 GARCH、SV 等模型经常被用于二元变量分析,多元 GARCH(刘志冬 2010)及 SV 模型同多元 Copula 函数结合也将成为一个新的发展方向。此外,随着新的计量模型不断被创造出来, Copula 理论也能同这些模型结合形成新的基于 Copula 理论的模型。

(4) 从应用创新角度来看,虽然我国 Copula 理论创新较国际上仍然有一定差距,但将国外最新模型引入并应用到我国各个领域当中从而解决我国金融、经济、农业、气象能源等领域中出现的问题也是将会成为一个重要的创新途径。此外, Fabrizio Durante(2010)指出相容性问题研究也会是一个可能的研究方向。

## 六、全文总结

本文全面地梳理了国内外 Copula 领域的主要研究成果,阐述了 Copula 理论的主要发展历程,介绍了一些典型的 Copula 函数,归纳了几种主流的基于 Copula 理论的计量模型,总结了 Copula 理论在多个领域的应用现状,最后对 Copula 理论的国内外研究进行了展望。经过梳理并总结后发现:一、从当前来看,我国学术界在 Copula 理论方面的创新比较少,大

多数研究成果停留在对 Copula 理论在我国各个领域中的应用方面。国外学者相比更注重通过模型解决有意义的金融问题以及创造基于 Copula 理论的新模型。因此,未来我国学术领域应不断提高理论创新能力,这样才能增大在此领域的贡献和国际影响力。二、Copula 作为辅助性工具同其他模型结合已经成为主流,但当前 Copula 理论能够被应用的模型尚少,因此如何更深入挖掘 Copula 理论在计量经济学、统计学模型当中的应用成为统计学家及计量经济学家的任务。三、Copula 理论在金融领域应用已经比较广泛,同时我们也可以看到 Copula 理论逐渐被引入农业、气象环境、系统可靠性等其他领域当中,随着 Copula 理论的进一步推广 Copula 理论可以越来越多的领域发挥出作用。

理论创新的最终落脚点是在解决实际问题,如果理论创新毫无应用价值那么创新的目的也就没有达到。Copula 理论在我国已经被应用于许多领域当中,除了金融、经济等 Copula 理论主要应用的领域,Copula 理论还能够在我国其他很多领域发挥到一定作用。例如,可以使用 Copula 理论研究我国不同地区之间的沙尘爆发相关性及相关结构,以及用 Copula 技术研究某地区沙尘暴爆发的风险问题。洪涝灾害一直是我国面临的主要自然灾害之一,我国学者可以通过借鉴国外学者的研究经验,将 Copula 理论应用于我国洪水灾害风险分析及洪灾爆发相关性方面的研究当中。近些年我国各大城市均受到雾霾天气影响,因此可以使用 Copula 理论刻画我国各大城市雾霾天气爆发风险。此外,Copula 理论还能被应用于地震分析、传染病防治、山体滑坡等问题研究领域。相信随着 Copula 理论在我国的不断推广,此理论能够在我国更多领域发挥出更重要的作用。

## 参考文献

- [1] Aloui R, Aïssa M S B, Nguyen D K. Global financial crisis, extreme interdependences, and contagion effects: The role of economic structure?[J]. *Journal of Banking & Finance*, 2011, 35(1): 130-141.
- [2] A. Sklar: Fonctions de repartition à n dimensions et leurs marges. *Publ. Inst. Statistique Univ. Paris* 8 (1959), 229-231.
- [3] B. Schweizer and A. Sklar: Mesure aléatoire de l'information et mesure de l'information par un ensemble d'observateurs. *C. R. Acad. Sci. Paris* 272 (1971), Sér. A, 149—152.
- [4] Bollerslev T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity [J]. *Journal of Econometrics*, 1986 (31): 307—327
- [5] Bartram S M, Taylor S J, Wang Y H. The Euro and European financial market dependence[J]. *Journal of Banking & Finance*, 2007, 31(5): 1461-1481.
- [6] Bianchi C, Carta A, Fantazzini D, et al. A copula-VAR-X approach for industrial production modelling and forecasting[J]. *Applied Economics*, 2010, 42(25): 3267-3277.
- [7] Cherubini U, Luciano E, Vecchiato W. *Copula methods in finance*[M]. Wiley. com, 2004.
- [8] Crook J, Moreira F. Checking for asymmetric default dependence in a credit card portfolio: A copula approach[J]. *Journal of Empirical Finance*, 2011, 18(4): 728-742.
- [9] Clemen R T, Reilly T. Correlations and copulas for decision and risk analysis[J]. *Management Science*, 1999, 45(2): 208-224.
- [10] Chang K L. The time-varying and asymmetric dependence between crude oil spot and futures markets: Evidence from the Mixture copula-based ARJI-GARCH model[J]. *Economic Modelling*, 2012, 29(6): 2298-2309.
- [11] Chollete L, De la Pena V, Lu C C. International diversification: A copula approach[J]. *Journal of banking & finance*, 2011, 35(2): 403-417.
- [12] Chollete L, Heinen A, Valdesogo A. Modeling international financial returns with a multivariate regime-switching copula[J]. *Journal of financial econometrics*, 2009, 7(4): 437-480.
- [13] *Dependence Modeling: Vine Copula Handbook*[M]. World Scientific, 2011.
- [14] Embrechts P, Lindskog F, McNeil A. Modelling dependence with copulas and applications to risk management[J]. *Handbook of heavy tailed distributions in finance*, 2003, 8(1): 329-384.
- [15] Embrechts P. Copulas: A personal view[J]. *Journal of Risk and Insurance*, 2009, 76(3): 639-650.

- [16] Fredricks G A, Nelsen R B. On the relationship between Spearman's rho and Kendall's tau for pairs of continuous random variables[J]. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 2007, 137(7): 2143-2150.
- [17] Gronwald M, Ketterer J, Trück S. The dependence structure between carbon emission allowances and financial markets: A copula analysis[R]. CESifo working paper: Public Choice, 2011.
- [18] Hakwa B, Jäger-Ambrożewicz M, Rüdiger B. Measuring and Analysing Marginal Systemic Risk Contribution using CoVaR: A Copula Approach[J]. <http://arxiv.org/abs/1210.4713>, 2012.
- [19] Hofert M, Scherer M. CDO pricing with nested Archimedean copulas[J]. *Quantitative Finance*, 2011, 11(5): 775-787.
- [20] Hofmann M, Czado C. Assessing the VaR of a portfolio using D-vine copula based multivariate GARCH models[J]. Submitted for publication, 2010.
- [21] Hu J. Dependence structures in Chinese and US financial markets: a time-varying conditional copula approach[J]. *Applied Financial Economics*, 2010, 20(7): 561-583.
- [22] Huang J J, Lee K J, Liang H, et al. Estimating value at risk of portfolio by conditional copula-GARCH method[J]. *Insurance: Mathematics and economics*, 2009, 45(3): 315-324.
- [23] José A. Rodríguez-Lallena, Manuel Úbeda-Flores. Distribution functions of multivariate functions of multivariate copulas[J]. *Statistics & Probability Letters*, 2003, 64(1): 41 - 50
- [24] Nelsen R B. Properties and applications of copulas: A brief survey[C]//*Proceedings of the First Brazilian Conference on Statistical Modeling in Insurance and Finance*, (Dhaene, J., Kolev, N., Morettin, PA (Eds.)), University Press USP: Sao Paulo. 2003: 10-28.
- [25] Nelsen R B. *An Introduction to Copulas* [M]. Springer, New York, 1999
- [26] Naifar N, Al Dohaiman M S. Nonlinear analysis among crude oil prices, stock markets' return and macroeconomic variables[J]. *International Review of Economics & Finance*, 2013.
- [27] Ning C. Dependence structure between the equity market and the foreign exchange market—a copula approach[J]. *Journal of International Money and Finance*, 2010, 29(5): 743-759.
- [28] Patton A J. MODELLING ASYMMETRIC EXCHANGE RATE DEPENDENCE\*[J]. *International economic review*, 2006, 47(2): 527-556.
- [29] Patton A J. *Applications of copula theory in financial econometrics*[D]. University of California, San Diego, 2002.
- [30] Reboredo J C. Modelling oil price and exchange rate co-movements[J]. *Journal of Policy Modeling*, 2012, 34(3): 419-440.
- [31] Silva Filho O C, Ziegelmann F A, Dueker M J. Modeling dependence dynamics through copulas with regime switching[J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2012, 50(3): 346-356.
- [32] Samitas A, Tsakalos I. How can a small country affect the European economy? The Greek contagion phenomenon[J]. *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money*, 2013, 25: 18-32.
- [33] Sklar A. Random variables, joint distribution functions, and copulas[J]. *Kybernetika*, 1973, 9(6): (449)-460.
- [34] Tobias Adrian, Markus K. Brunnermeier. COVAR, 2011
- [35] Wu C C, Liang S S. The economic value of range-based covariance between stock and bond returns with dynamic copulas[J]. *Journal of Empirical Finance*, 2011, 18(4): 711-727.
- [36] 黄在鑫, 覃正. 中美主要金融市场相关结构及风险传导路径研究——基于 Copula 理论与方法[J]. *国际金融研究*, 2012 (5): 74-82.
- [37] 何旭彪. 金融风险综合评估方法最新研究进展[J]. *国际金融研究*, 2008 (6): 63-68.
- [38] 韦艳华, 张世英. 多元 Copula-GARCH 模型及其在金融风险分析上的应用[J]. *数理统计与管理*, 2007, 26(3): 432-439.
- [39] 许启发. 高阶矩波动性建模及应用[J]. *数量经济技术经济研究*, 2006, 23(12): 135-145.
- [40] 叶五一, 缪柏其. 已实现波动与日内价差条件下的 CVaR 估计[J]. *管理科学学报*, 2012, 15(8): 60-71.
- [41] 余素红, 张世英, 宋军. 基于 GARCH 模型和 SV 模型的 VaR 比较[J]. *管理科学学报*, 2004, 7(5): 61-65.
- [42] 张尧庭. 连接函数 (Copula) 技术与金融风险分析[J]. *统计研究*, 2002, 4: 48-51.
- [43] 周孝华, 张保帅, 董耀武. 基于 Copula-SV-GPD 模型的投资组合风险度量[J]. *管理科学学报*, 2012, 15(12): 70-78.