

均值尾部相关系数及其 在金融领域的应用*

黄在鑫 咸劲

内容提要: 传统尾部相关系数常被用于刻画变量之间的极值相关性,但这种相关系数存在对相关系数刻画不完全的问题。为能够捕获更多的非极值相关性信息,本文提出均值尾部相关系数的概念,研究了均值尾部系数同 Copula 理论之间的关系,并以 t Copula 为例分析了 4 种均值尾部相关系数的变化特征。通过将均值尾部相关系数和传统尾部相关系数分别应用于沪深股市的相关性研究,从实证角度验证了这种相关系数的实用价值。

关键词: 均值尾部相关系数; 尾部相关系数; Copula

中图分类号: F222.3 文献标识码: A 文章编号: 1002-4565(2015)02-0076-07

Mean Tail Dependence Coefficient and Its Application in Financial Fields

Huang Zaixin & Xian Jin

Abstract: The traditional tail dependence coefficients can be used for describing the extreme correlation between different variables, however, this kind of coefficients lost information in capturing the non-extreme correlation information. In order to capture more correlation information, this paper proposes the concept of Mean Tail Dependence Coefficient. In this paper, we analyze the relationship between Copula theory and Mean tail dependence coefficient, and then we use the t Copula function to analyze the characteristics of four Mean tail dependence coefficients. Finally, in order to test their practical value, we apply Mean tail dependence coefficients in the Chinese stock markets and analyze the correlation between the stock index of Shanghai and Shenzhen.

Key words: Mean Tail Dependence Coefficient; Tail Dependence Coefficient; Copula

一、引言

传统线性相关系数基于变量服从正态分布的假设(Cherubini, 2004),因此当变量不服从正态分布时使用此相关系数度量变量之间的相关性就不再准确(Embrechts, 2002; Cherubini, 2004)。尾部相关系数(Joe, 1990; Ledford, 1996, 1997, 1998; Coles S, 1999, 2000; Juri A, 2002; Schmidt, 2007)是刻画一个变量出现极值情况下另一个变量也出现极值情况的工具,其大小表征了两个变量之间的极值相关性强弱。传统的尾部相关系数主要包括上尾相关系数(式(1))及下尾相关系数(式(2))。前者主要刻画两个变量同时趋向于上尾的极限值,后者主要刻画两个变量同时趋向于下尾的极限值。同传统线性相关系数在刻画尾部相关性方面的无力相比(B.

Mendes, 2005; Loraán, 2011),这种相关系数可以有效地捕捉到数据的尾部相关性,因此也被广大学者应用于金融市场相关性方面的度量(Patton, 2006; 黄在鑫, 2012)。

$$\lambda_{upper} = \lim_{x \rightarrow 1} Pr\{x_2 > F_2^{-1}(x) \mid x_1 > F_1^{-1}(x)\} \quad (1)$$

$$\lambda_{lower} = \lim_{x \rightarrow 0} Pr\{x_2 \leq F_2^{-1}(x) \mid x_1 \leq F_1^{-1}(x)\} \quad (2)$$

Copula 函数用于刻画不同分布变量之间的相关结构(Sklar, 1959)。Joe (1997)使用 Copula 理论定义了多种 Copula 函数的上下尾部相关系数。但是并非所有的 Copula 函数均具有尾部相关系数,部分

* 本文获上海财经大学博士研究生创新基金“全球主要金融市场动态相关结构及风险传导路径研究”(CXJJ-2012-425)及国家自然科学基金委员会(国家建设高水平大学公派博士研究生项目)资助。

Copula 函数只存在上尾相关系数或下尾部相关系数,有的则两者均存在,因此不同 Copula 函数具有不同形式的尾部相关系数。Heffernan (2000)、Rafael Schmidt (2005)、Nelsen (2007) 分别详细地介绍了多种不同 Copula 函数的上下尾部相关系数; Charpentier (2007) 列举了多种阿基米德 Copula 函数的下尾相关系数。尾部相关系数有多种计算方法,采用 Copula 函数计算是其中一种比较常见的方法, Frahm (2005) 指出,参数估计、半参数估计以及非参数估计等多种方法也可以用于计算尾部相关系数。此外, Charpentier (2003) 定义了基于条件 Copula 函数的尾部相关系数; Demarta (2005) 研究了 t Copula 函数的尾部相关性; Manner (2011) 研究了混合椭圆 Copula 函数的尾部特性。尾部相关系数还被用于研究常见联合分布函数的尾部相关性特征。例如, Banachewicz (2008) 研究了 Skewed grouped t 形式的联合分布的尾部相关性。

目前,尾部相关系数已经被广泛应用于金融领域 (Ines Fortin, 2002、Eric Bouyé, 2002、Gabriel Frahm, 2005)。但在实际应用中,传统尾部相关系数存在以下缺陷:第一,上下尾部相关系数只能对数据同时趋向于上尾或下尾部的相关性进行度量,而当面临变量分别趋向于不同的尾部,即一个变量趋向于上尾,另一个变量趋向于下尾的情况下却显得无力。第二,尾部相关系数只能刻画极值情况,即当变量同时趋向于极值(式(1)和式(2)中 $x = 1 - \rho$) 时的条件概率极限值。然而在实际应用当中极值情况较为罕见(例如股票收益率过高或过低),大部分情况下发生的事件属于非极值事件,所以当我们采用尾部相关系数来刻画相关性时只是刻画了最极端的情况,许多非极值事件的相关性信息被遗漏。例如,股票市场收益率大部分是非极值数值,即使在“牛市”或“熊市”时期非极值事件的爆发概率也并非会增大,因此,使用传统尾部相关系数仅能刻画极值这种特殊情况下变量之间的相关性,而能够反映一般事件的“上尾区间”及“下尾区间”之间的相关性信息却丢失。第三,使用传统尾部相关系数计算相关性的前提是变量之间的上尾相关系数或下尾相关系数均存在,因此一旦其尾部相关系数极限值不存在就无法使用此方法来刻画尾部相关性。

针对第一个缺陷, Zhang (2008) 将尾部相关系数拓展至全维度的尾部相关系数,即:两个主对角线

尾部相关系数及两个次对角线尾部相关系数;秦学志 (2011) 也计算并推广了传统尾部相关系数,并将其应用于实证分析验证了推广后的尾部相关系数的使用价值。针对第二、三个缺陷,本文将式(1)和式(2)中的极限形式更改为 $x \rightarrow q$,从而将尾部相关系数推广至对上尾区间及下尾区间相关性信息的刻画(对于上尾区间,分位数参数 $q \in [0.5, 1]$;对于下尾区间,分位数参数 $q \in (0, 0.5]$)。由于刻画的是“尾部区间”的条件相关性特征,因此上下尾部相关系数极限值存在与否不影响此度量。综合以上三点改进,本文提出了均值尾部相关系数的概念,从而更全面地刻画尾部区间的相关性信息,通过将此相关系数应用于我国沪深股市之间的相关性研究,分析了沪深股市之间更为全面的相关性特征。

二、均值尾部相关系数基本概念

(一) 均值尾部相关系数基本概念

分别令 $UUTDC_x$ 、 $ULTDC_x$ 、 $LUTDC_x$ 、 $LLTDC_x$ 为分位数 x 的函数,他们依次定义了在不同分位数的情况下上尾—上尾、上尾—下尾、下尾—上尾、下尾—下尾的变量之间条件概率值。当分位数 x 取值 q 时则度量了 $x = q$ 的条件下变量之间的条件概率值。然而事实上,这只是一种普通情况,仍然存在分位数 $x \in (0, 1)$ 且 $x \neq q$ 的其他情况。为了能充分捕获及刻画这部分信息,本文采用期望的方法计算得到上尾—上尾、上尾—下尾、下尾—上尾、下尾—下尾区间变量之间条件概率的期望值,旨在通过使用在某区间内变量之间条件概率的均值来刻画尾部区间内更全面的相关性信息。本文将这些相关系数统一命名为均值尾部相关系数,其公式分别如下:

$$UUTDC_x = G_{upper-upper}(x) = Pr\{x_2 > F_2^{-1}(x) \mid x_1 > F_1^{-1}(x)\} \quad x \in [0.5, 1] \quad (3)$$

$$MTDC_{UU}^q = E(UUTDC_x : x \geq q) \quad q \in [0.5, 1] \quad (4)$$

$$ULTDC_x = G_{upper-lower}(x) = Pr\{x_2 > F_2^{-1}(x) \mid x_1 < F_1^{-1}(1-x)\} \quad x \in [0.5, 1] \quad (5)$$

$$MTDC_{UL}^q = E(ULTDC_x : x \geq q) \quad \alpha \in [0.5, 1] \quad (6)$$

$$LUTDC_x = G_{lower-upper}(x) = Pr\{x_2 < F_2^{-1}(x) \mid x_1 > F_1^{-1}(1-x)\} \quad x \in [0, 0.5] \quad (7)$$

$$MTDC_{LU}^q = E(LUTDC_x : x \leq q) \quad \alpha \in [0, 0.5] \quad (8)$$

$$LLTDC_x = G_{lower-lower}(x) = Pr\{x_2 < F_2^{-1}(x) \mid x_1 < F_1^{-1}(x)\} \quad x \in [0, 0.5] \quad (9)$$

$$MTDC_{LL}^q = E(LLTDC_k : x \leq q) \quad \alpha \in [0, 0.5] \quad (10)$$

其中 x_1, x_2 分别表示两个随机变量, $F_1^{-1}(x)$ 、 $F_2^{-1}(x)$ 分别为其分布函数的逆函数, 表示分位数。

为能够直观地看出以上 4 种均值尾部相关系数所刻画的内容, 本文使用参数 $\theta = 5$ 的 Frank Copula 函数随机模拟 5000 个数据点, 并将以上相关系数直观地在二维坐标轴上呈现出来(见图 1)。如图 1 所示, 深色部分分别为 $MTDC_{UU}^{q=0.9}$ 、 $MTDC_{UL}^{q=0.9}$ 、 $MTDC_{LU}^{q=0.1}$ 、 $MTDC_{LL}^{q=0.1}$ 所刻画的区间范围, 其中对角线上加粗部分便为所计算期望的数值点的集合; 同理, 浅色部分分别为 $MTDC_{UU}^{q=0.7}$ 、 $MTDC_{UL}^{q=0.7}$ 、 $MTDC_{LU}^{q=0.3}$ 、 $MTDC_{LL}^{q=0.3}$ 所刻画的区间范围, 此范围内的对角线上的点便为最终计算条件概率值期望的所有点的集合。分位数参数 q 可以在其定义域内取不同数值, 当其取值变化时条件概率点随之沿主对角线及次对角线变化。当 $q \rightarrow 1$ 或 $q \rightarrow 0$ 时, $MTDC_{UU}$ 与 $MTDC_{LL}$ 则分别转化为传统上尾相关系数 λ_{upper} 及下尾相关系数 λ_{lower} 。

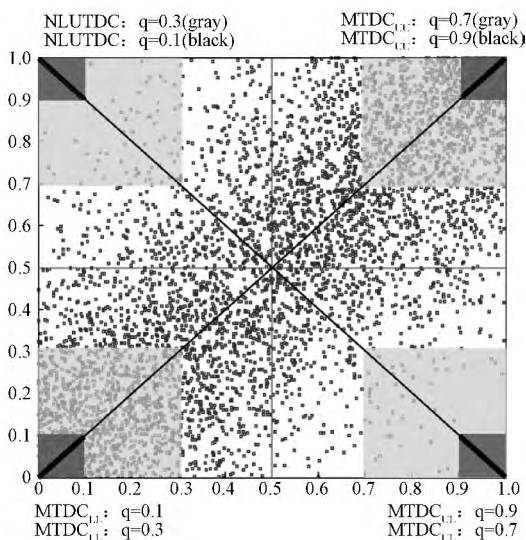


图 1 均值尾部相关系数示意图

从均值尾部相关系数的定义可以看出, 它具有明显的单调性, 即随着分位数参数 q 的变化其数值呈现出单调增或减。关于均值尾部相关系数的取值, 从定义可以看出 4 种均值尾部相关系数均存在上限和下限, 但不同的上限及下限数值会由不同的 Copula 函数决定, 其上下限分别为:

$$\begin{aligned}
 MTDC_{UU}^1 &\leq MTDC_{UU}^q \leq MTDC_{UU}^{0.5} \\
 MTDC_{UL}^1 &\leq MTDC_{UL}^q \leq MTDC_{UL}^{0.5} \\
 MTDC_{LU}^0 &\leq MTDC_{LU}^q \leq MTDC_{LU}^{0.5}
 \end{aligned}$$

$$MTDC_{LL}^0 \leq MTDC_{LL}^q \leq MTDC_{LL}^{0.5}$$

三、Copula 理论与均值尾部相关系数

(一) Copula 理论简介

Copula 函数由 Sklar(1959, 1971, 1973) 首次提出。Joe(1997)、Nelsen(1999) 对其进行了详细介绍和梳理。Copula 函数主要用于刻画不同变量之间的相关结构, 这种函数使得刻画不同分布变量之间的联合分布成为可能。二元 Copula 函数定义如下:

令 $H(x, y)$ 是变量 X, Y 的二维联合分布函数, 两个变量的边缘分布函数分别为 $u = F(x)$ 和 $v = G(y)$, 于是对于所有的 $u, v \in [0, 1]$, 必定存在一个 Copula 函数 C 使得:

$$H(x, y) = C(u, v) = C(F(x), G(y)) \quad (11)$$

(二) 常见 Copula 函数种类及其尾部相关系数

Copula 函数有很多种类型(Joe, 1997)。常见的 Copula 函数主要有椭圆 Copula 函数族和阿基米德 Copula 函数簇, 其中椭圆族 Copula 函数包括 Gaussian Copula 函数和 t Copula 函数, 阿基米德 Copula 函数簇包括 Clayton Copula、Gumbel Copula、Frank Copula 等函数。并非所有的 Copula 函数同时具备上下尾部相关系数, 上下尾部相关系数也并非一定相等。

与此同时 Gaussian Copula 和 Frank Copula 的上下尾部相关系数均不存在, t Copula 具有对称的上下尾部相关系数, Clayton Copula 只具有下尾相关系数, Gumbel Copula 只具有上尾相关系数。如果使用传统的尾部相关系数我们无法捕捉到对于尾部相关系数不存在的 Copula 函数的上下尾的相关性特征, 但本文提出的均值尾部相关系数却能够对尾部区间的相关性特征进行刻画, 所以能有效解决前文提到的传统尾部相关系数的几点缺陷。

(三) 基于 Copula 函数的均值尾部相关系数

变量之间的 Copula 函数之间的条件概率存在一定关系(Brice Hakwa, 2011), 因此前文提到的均值尾部相关系数均可以通过 Copula 函数求得, 基于 Copula 的不同均值尾部相关系数的推导过程如下:

$$\begin{aligned}
 MTDC_{UU}^q &= E(UUTDC_x : 1 > x \geq q \geq 0.5) \\
 &= \frac{1}{(1-q)} \int_q^{1-} UUTDC_x dx \\
 &= \frac{1}{(1-q)} \int_q^{1-} Pr\{x_2 > F_2^{-1}(x) \mid x_1 > F_1^{-1}(x)\} dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{(1-q)} \int_q^{1-q} \frac{\Pr\{x_2 > F_2^{-1}(x) \mid x_1 > F_1^{-1}(x)\}}{\Pr\{x_1 > F^{-1}(x)\}} dx \\
 &= \frac{1}{(1-q)} \int_q^{1-q} \frac{1-2x+C(x,x)}{1-x} dx \quad (12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 MTDC_{UL}^q &= E\{ULTDC_x : 1 > x \geq q \geq 0.5\} \\
 &= \frac{1}{(1-q)} \int_q^{1-q} ULTDC_x dx \\
 &= \frac{1}{(1-q)} \int_q^{1-q} \Pr\{x_2 > F_2^{-1}(x) \mid x_1 < F_1^{-1}(1-x)\} dx \\
 &= \frac{1}{(1-q)} \int_q^{1-q} \frac{\Pr\{x_2 > F_2^{-1}(x) \mid x_1 < F_1^{-1}(1-x)\}}{\Pr\{x_1 < F^{-1}(1-x)\}} dx \\
 &= \frac{1}{(1-q)} \int_q^{1-q} \frac{1-x-C(x,1-x)}{1-x} dx \quad (13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 MTDC_{LU}^q &= E\{LUTDC_x : 0 < x < q \leq 0.5\} \\
 &= \frac{1}{q} \int_{0+\varepsilon}^q LUTDC_x dx \\
 &= \frac{1}{q} \int_{0+\varepsilon}^q \Pr\{x_2 < F_2^{-1}(x) \mid x_1 > F_1^{-1}(1-x)\} dx \\
 &= \frac{1}{q} \int_{0+\varepsilon}^q \frac{\Pr\{x_2 < F_2^{-1}(x) \mid x_1 > F_1^{-1}(1-x)\}}{\Pr\{x_1 > F^{-1}(1-x)\}} dx \\
 &= \frac{1}{q} \int_{0+\varepsilon}^q \frac{x-C(x,1-x)}{x} dx \quad (14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 MTDC_{LL}^q &= E\{LLTDC_x : 0 < x \leq q \leq 0.5\} \\
 &= \frac{1}{q} \int_{0+\varepsilon}^q UUTDC_x dx \\
 &= \frac{1}{q} \int_{0+\varepsilon}^q \Pr\{x_2 < F_2^{-1}(x) \mid x_1 < F_1^{-1}(x)\} dx \\
 &= \frac{1}{q} \int_{0+\varepsilon}^q \frac{\Pr\{x_2 < F_2^{-1}(x) \mid x_1 < F_1^{-1}(x)\}}{\Pr\{x_1 < F^{-1}(x)\}} dx \\
 &= \frac{1}{q} \int_{0+\varepsilon}^q \frac{C(x,x)}{x} dx \quad (15)
 \end{aligned}$$

(四) 均值尾部相关系数与分位数参数的关系

为了研究分位数参数 q 与以上 4 种均值尾部相关系数的关系, 本文依次刻画了当 t Copula 取相关系数 $\rho = 0.99$ (变量接近于完全正相关) 及不同自由度时的 4 种均值尾部相关系数同其分位数参数 q 的相关关系。当相关系数 $\rho = 0.99$ 、自由度为 3 时, $MTDC_{UL}$ 的数值在 $q = 0.5$ 处取得最大值 (约为 0.93)。随着分位数参数变大其数值逐渐减小, 当 $q = 1$ 时衰减为约 0.89, 此数值为相同自由度和相关系数时的上尾相关系数值。在低自由度区间自由度为 (3~20) 且分位数相同的情况下, 其数值随着自由度的增加而减小, 但自由度进一步增加时, 自由度的大小对其数值的影响逐渐消失。由于 t Copula 函

数具备对称性特征, 所以其下尾部变化特征同上部尾部变化特征类似: 当分位数参数 $q = 0.5$ 时均值下尾相关系数取得最大值, 随着分位数参数减小其变化趋势表现出与 $MTDC_{UU}$ 相对称的特征; 同样, 在低自由度情况下, 自由度增加时同分位数下的均值下尾相关系数逐渐减小, 但当自由度进一步增加时, 它对均值下尾相关系数的影响逐渐消失。此外, 从 $MTDC_{UL}$ 与 $MTDC_{LU}$ 的图形中也可以看出, 它们表现对称性的变化特征。与 $MTDC_{UU}$ 和 $MTDC_{LL}$ 不同的是, 自由度对这两个数值的影响不明显。同时, 当分位数参数在区间 $[0.4, 0.5]$ 上变化时其数值迅速从最大值衰减至接近于 0。究其原因, 主要是这两个均值尾部相关系数反映的是斜尾相关性, 由于本文采用的是正相关性比较强 ($\rho = 0.99$) 的 t Copula, 因此两个斜尾的条件相关性必定比较小。

通过分析最终分析出以下结论: ① 基于 t Copula 函数的四个均值尾部相关系数取值分别对参数 q 为单调的, 与 $MTDC_{UU}$ 与 $MTDC_{LL}$ 的变化特征具备对称性, $MTDC_{UL}$ 与 $MTDC_{LU}$ 的变化特征具备对称性。② 当分位数参数分别趋向于 4 个尾部时 4 个均值尾部相关系数均退化为 4 个尾部相关系数, 因此均值尾部相关系数能够捕获更多的非尾部的相关性信息, 相比传统尾部相关系数更适合用于刻画相关性。

本文只采用 t Copula 来分析 4 种均值尾部相关系数的变化特征, 对于其他 Copula 函数, 均值尾部相关系数会表现出不同的变化特征, 例如, Gumbel Copula、Clayton Copula 的上下尾部不对称特征, Tawn Copula 的斜尾不对称特征等, 本文不再详述。

四、我国沪深股市之间的均值尾部相关性分析

(一) 数据选择及基本统计量

为验证均值尾部相关性在分析股票市场相关性方面的优势, 本文选取上证综指 SHZ 和深圳成指 SZZ 的股市大盘日收益率作为研究对象, 将本文提及的均值尾部相关系数用于分析这两个股票市场之间的相关性。选择的样本区间为 2000 年 1 月 4 日至 2013 年 12 月 31 日, 经过剔除不完整数据以及非共同交易日数据, 最终得到 3557 条有效数据。数据来自 Yahoo 财经, 数据分析采用 R3.0.2 及 Matlab 2013。收益率采用对数形式计算, 为减少计算过程

中出现的误差将计算结果做了扩大 100 倍处理:

$$R_{n,t} = 100 \cdot \ln\left(\frac{P_{n,t}}{P_{n,t-1}}\right) \quad t = 1, 2, \dots, 3557,$$

$$n = 1, 2 \quad (16)$$

通过对收益率序列进行基本统计特征分析(见表 1)可以看出,两组收益率序列峰度均大于 0,呈现出明显的“尖峰”特征。通过采用 QQ 图分析发现数据均表现出一定的“厚尾”特征。同时,从数据的基本统计特征分析可以看出,两组收益率序列均值均存在一定程度的“左偏”、“右偏”现象,我们分别采用 J-B 检验及 K-S 检验对数据进行检验,均完全拒绝了正态分布的假设,由此我们推断采用 Skewed student-t 分布来刻画两组数据的分布特征比较合适。为避免出现建模过程的伪回归问题,本文分别对两组收益率序列进行了 ADF 检验,检验结果表明在 1%、5% 以及 10% 显著水平下均拒绝了数据非平稳的假设,因此我们可以对此两组收益率序列进行建模。为能有效剔除数据的相关性信息,本文采用 ARMA(p,q) 模型作为均值方程。通过对序列平方进行相关性检验,发现数据存在明显的“异方差”特征。通过对收益率序列残差进行 ARCH LM 检验后发现,滞后 1 阶、5 阶及 10 阶的残差均存在异方差性。

(二) 边缘过滤模型

为获得用于度量股市之间相关性的独立同分布的残差,需要对原始收益率序列的“相关性”、“异方差性”、“杠杆性”进行“过滤”,因此本文选择 ARMA(p,q)-GJR-GARCH(M,N)-Skewed student-t 模型对两组收益率序列进行建模,根据不同的收益率序列特征选择合适的模型。所建立的模型如下:

$$r_{n,t} = \mu + \sum_{i=0}^p ar_{n,t}r_{n,t-i} + \sum_{j=-}^q ma_{n,j}\varepsilon_{n,t-j} + \varepsilon_{n,t} \quad (17)$$

$$\sigma_{n,t}^2 = \omega_n + \sum_{i=1}^M arch_{n,i}\varepsilon_{n,t-i}^2 + \gamma_{n,2}s_{n,t-1}\varepsilon_{n,t-1}^2 + \sum_{i=i}^N garch_{n,i}\sigma_{n,t-i}^2 \quad (18)$$

$$s_{n,t-1} + \begin{cases} 1 & \text{if } \varepsilon_{n,t-1} < 0 \\ 0 & \text{if } \varepsilon_{n,t-1} \geq 0 \end{cases} \quad (19)$$

$$\varepsilon_{n,t} = \sigma_{n,t}z_{n,t} \quad (20)$$

$$z_{n,t} | \psi_{n,t-1} \sim iid(0,1) \quad (21)$$

$$z_{n,t} \sim Skewed-student-t_{\eta_n, \lambda_n}(0,1) \quad (22)$$

$$(z_{1,t}, z_{2,t}) | \Theta_{t-1} \sim C(F_{Skewed-student-t(\eta_1, \lambda_1)}^{-1}(z_{1,t}), F_{Skewed-student-t(\eta_2, \lambda_2)}^{-1}(z_{2,t}) | \Theta_{t-1}) \quad (23)$$

$$d(z_{n,t}; \eta_n, \lambda_n) = \begin{cases} b_n c_n \left(1 + \frac{1}{\eta_n - 2} \left(\frac{b_n z_{n,t} + a_n}{1 - \lambda_n}\right)^2\right)^{-[(\eta_n+1)/2]} & z_{n,t} < -a_n/b_n \\ b_n c_n \left(1 + \frac{1}{\eta_n - 2} \left(\frac{b_n z_{n,t} + a_n}{1 + \lambda_n}\right)^2\right)^{-[(\eta_n+1)/2]} & z_{n,t} \geq -a_n/b_n \end{cases} \quad (24)$$

$$a_n \equiv 4\lambda_n c_n \frac{\eta_n - 2}{\eta_n - 1} \quad (25)$$

$$b_n^2 \equiv 1 + 3\lambda_n^2 - a_n^2 \quad (26)$$

$$c_n \equiv \frac{\Gamma\left(\frac{\eta_n + 1}{2}\right)}{\sqrt{\pi(\eta_n - 2)} \Gamma\left(\frac{\eta_n}{2}\right)} \quad (27)$$

公式中各变量表示如下: t 表示时刻点 $t = 1, 2, \dots, 3557$; n 表示不同的时间序列 $n = 1, 2$; $\sigma_{n,t}$ 表示收益率序列 n 在 t 时刻的标准差; $\varepsilon_{n,t}$ 表示收益率序列 n 在 t 时刻的残差; $\psi_{n,t-1}$ 表示在 $t-1$ 时刻的所有信息集合; 当 $u_{n,t-1}$ 为负值时 $s_{n,t-1} = 1$, 当其为正值时 $s_{n,t-1} = 0$; η_n 和 λ_n 分别表示自由度参数和偏度参数; $z_{n,t}$ 为 GARCH 模型 t 时刻的标准残差,服从自由度和偏度分别为 $\eta_{n,t}$ 和 $\lambda_{n,t}$ 的 Skewed Student-t 分布; $C(\cdot)$ 表示刻画变量残差相关结构的 Copula 函数; Θ_{t-1} 表示 $t-1$ 时刻序列的条件集合。

通过使用以上模型分别对上证综指和深证股指进行建模,然后根据 AIC 准则确定出拟合优度最高的模型,并对其参数进行估计。从估计结果中可以

表 1 收益率序列基本统计特征

	最小值	最大值	均值	标准差	峰度	偏度	J-B (P value)	K-S (P value)	ADF 统计量	LM 统计量 (P value)		
										1 阶	5 阶	10 阶
SHZ	-9.2562	9.4008	0.0121	1.5592	4.5940	-0.0905	3256.837 (0.0000)	0.0608 (0.0000)	-58.4448 ***	54.8991 (0.0000)	157.5260 (0.0000)	225.5522 (0.0000)
SZZ	-9.7500	9.7646	0.0245	1.7553	3.7872	-0.1019	2183.001 (0.0000)	0.0861 (0.0000)	-57.1708 ***	65.3536 (0.0000)	167.6346 (0.0000)	236.8646 (0.0000)

注: (1) ***表示在 1% 置信区水平上显著。(2) 在 R 软件中,峰度大于 0 的分布被认为具有“尖峰”特征。

看出, 上证指数及深证指数的杠杆项均为负值, 可见两者均存在一定的负面杠杆效应。从 Ljung-Box Q 统计量 10 阶及 20 阶的数据来看, 经模型过滤后的残差序列已经不存在相关性。LM 异方差检验结果也显示最终残差序列不存在异方差性。为验证模型最终的有效性, 我们对标准残差序列进行了概率积分转换, K-S 检验结果表明转换后的序列属于 [0, 1] 上的独立同分布序列。可见, 我们选择的 ARMA (p, q) -GJR-GARCH (M, N) -Skewed student-t 模型较好地刻画了两个收益率序列。

(三) 相关结构建模

Gaussian Copula、t Copula、Frank Copula 可以被用于上下尾部对称的相关结构刻画, Clayton Copula、Gumbel Copula 分别适合刻画下尾相关结构及上尾相关结构。为能够充分选择最优刻画沪深股票市场相关结构的 Copula 函数, 本文分别使用以上几种 Copula 函数对数据进行了拟合, 并根据 AIC 准则及最大对数似然值准则最终选择 t Copula 函数作为刻画其相关结构的函数, 参数估计值见表 2。通过绘制上证指数及深证指数的二元频率直方图可以看出, 其上下尾存在较为明显的对称结构, 符合 t Copula 函数刻画相关结构的类型。通过绘制所估计 t Copula 函数的概率密度图可以看出, 估计的 t Copula 函数能够很好地反映原始数据的分布特征。

(四) 沪深股票市场之间的均值尾部相关性及其尾部相关性分析

传统尾部相关系数只能刻画变量之间的极值条件概率, 而我们平时所描述的相关性信息还包括许多非极值条件事件, 为尽可能多地捕获这些非极值条件事件相关性信息, 本文选用分位数参数 $q = 0.1, 0.25, 0.5$ 时的均值尾部相关系数来刻画沪深股市之间的条件相关性。同时, 为进行对比, 本文也分别计算了沪深股市之间的传统上尾相关系数和下尾相关系数。

从计算结果可知, 沪深股市之间的上尾及下尾相关系数 λ_{upper} 及 λ_{lower} 均为 0.6828, 两个主对角线均

值尾部相关系数 $MTDC_{UU}$ 及 $MTDC_{LL}$ 数值均大于 0.6828, 同时两个次对角线尾部相关系数 $MTDC_{UL}$ 及 $MTDC_{LU}$ 均比较小(当 $q = 0.5$ 时相对较大), 由此可见两地股市之间相关性比较强。均值尾部相关系数数值大于尾部相关系数, 说明其刻画了更多的“非尾部”相关性信息。

在实际应用中, 为了能够刻画更为广泛的上尾区间及下尾区间的事件, 可以根据需要选择不同的分位数参数 q 。当 $q = 0.5$ 时 4 种均值尾部相关系数分别刻画了当数据分别位于二维坐标轴 4 个区域的条件概率的均值, 应用于金融领域的意义在于: $MTDC_{UU}$ 刻画了“当一只股票涨的情况下另一只股票也涨的条件概率均值”, 刻画了“当一只股票跌的情况下另一只股票也跌的条件概率均值”; 类似地, $MTDC_{UL}$ 及 $MTDC_{LU}$ 分别刻画了“当一只股票涨的情况下另一只股票跌的条件概率均值”及“当一只股票跌的情况下另一只股票涨的条件概率均值”。 $MTDC_{UU}$ 和 $MTDC_{LL}$ 的值越高, 则说明变量之间的同向相关性越强, $MTDC_{UL}$ 和 $MTDC_{LU}$ 的值越高则说明两者之间的斜向相关性越强。当 $q = 0.1$ 时, 此时的 4 种均值尾部相关系数度量了位于“尾部区间”的事件的相关性信息, 这种情形下可以捕获除尾部相关系数之外所能捕获的尾部信息。 q 的取值可以自由设定, 一般情况下可以设定为 $q = 5\%$ (常用 VaR 分位数)。由此可见, 均值尾部相关系数更符合一般情况下人们对非极值事件“相关性”的定义。

五、结语

传统尾部相关系数只能刻画变量之间的上尾及下尾极值相关性, 而无法刻画更多的非极值事件。因此, 本文提出均值尾部相关系数的概念, 通过计算上尾—上尾、上尾—下尾、下尾—上尾、下尾—下尾区间下变量之间条件概率的均值来刻画更为全面的非极值事件的相关性信息。这种相关系数基于这样的思想: 某一分位数下的变量之间的条件概率只反映了变量在一定分位数下的相关性, 不同分位数下

表 2 不同 Copula 函数参数估计结果

	Gaussian Copula	t Copula		Gumbel Copula	Clayton Copula	Frank Copula
	ρ	ρ	v	δ	ω	δ
参数估计值	0.9281652(0.0143719)	0.9289792(0.0152958)	4.089179(5.346281)	3.926968(0.014861)	4.22162(0.0788046)	14.5582(0.2406341)
极大对数似然值	3526.987	3662.277		3439.383	2985.647	3203.637
AIC 值	-7051.974	-7320.555		-6876.765	-5969.293	-6405.273

条件概率的均值可以刻画更多事件的相关性信息。一方面,使用这种相关系数可以捕捉到更多的非极值事件信息,另一方面也可以在变量之间尾部相关系数不存在时使用。

本文提出并介绍了均值尾部相关系数的基本概念,研究了不同均值尾部相关系数与 Copula 函数之间的关系,然后以 t Copula 为例分析了均值尾部相关系数同分位数参数之间的关系,并通过实证分析沪深股市之间的均值尾部相关性,检验了此相关系数的应用价值。这种均值尾部相关系数仍然有拓展空间:由于均值尾部相关系数只具有一个分位数参数变量,因此只能求得在二维坐标主对角线和次对角线上点的条件概率均值,当两个变量的分位数分别取不同数值时的条件概率均值便无法进行刻画,因此双参数的均值尾部相关系数可以捕获更多的信息;此外,传统尾部相关系数及本文所提及的均值尾部相关系数均是基于双变量的定义,创造多变量的尾部相关系数有助于分析多维变量之间的相关性。

参考文献

- [1] Bortot P. Tail dependence in bivariate skew-Normal and skew-t distributions[J]. Available online: www2.stat.unibo.it/bortot/ricerca/paper-sn-2.pdf, 2010.
- [2] Banachewicz K, van der Vaart A. Tail dependence of skewed grouped t-distributions[J]. *Statistics & Probability Letters*, 2008, 78(15): 2388-2399.
- [3] Charpentier A, Segers J. Lower tail dependence for Archimedean copulas: characterizations and pitfalls[J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2007, 40(3): 525-532.
- [4] Charpentier A. Tail distribution and dependence measures [C]. *Proceedings of the 34th ASTIN Conference*. 2003.
- [5] Embrechts P, McNeil A, Straumann D. Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls[J]. *Risk management: value at risk and beyond*, 2002: 176-223.
- [6] Frahm G, Junker M, Schmidt R. Estimating the tail-dependence coefficient: Properties and pitfalls[J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2005, 37(1): 80-100.
- [7] Hakwa B. Measuring the Marginal Systemic Risk Contribution Using Copula[J]. Available at SSRN 1934894, 2011.
- [8] Heffernan J E. A directory of coefficients of tail dependence [J]. *Extremes*, 2000, 3(3): 279-290.
- [9] Joe H. Multivariate concordance [J]. *Journal of multivariate analysis*, 1990, 35(1): 12-30.
- [10] Juri A, Wüthrich M V. Copula convergence theorems for tail events [J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2002, 30(3): 405-420.
- [11] Joe H. *Multivariate models and multivariate dependence concepts* [M]. CRC Press, 1997.
- [12] Ledford A W, Tawn J A. Statistics for near independence in multivariate extreme values[J]. *Biometrika*, 1996, 83(1): 169-187.
- [13] Manner H, Segers J. Tails of correlation mixtures of elliptical copulas [J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2011, 48(1): 153-160.
- [14] Zhang M H. Modelling total tail dependence along diagonals [J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2008, 42(1): 73-80.
- [15] 秦学志, 王玥. 尾部相关系数的渐进变化特征及其在应用[J]. *系统工程理论与实践*, 2011, 31(2): 193-204.
- [16] 黄在鑫, 覃正. 中美主要金融市场相关结构及风险传导路径研究——基于 Copula 理论与方法[J]. *国际金融研究*, 2012(5): 74-82.

作者简介

黄在鑫,男,1985年生,河南濮阳人,2009年毕业于上海财经大学管理科学与工程专业,获硕士学位,现为上海财经大学同美国哥伦比亚大学联合培养博士研究生。研究方向为 Copula 理论、金融风险。

咸劲,男,1980年生,山东滨州人,现为上海财经大学信息管理与工程学院博士研究生。研究方向为金融工程、电子商务与电子政务。

(责任编辑:曹麦)